



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ.Электрон. журн. 2019, № 1, с. 85-91.

Поступила: 26.03.2019

Окончательный вариант: 07.05.2019

© УлГУ

УДК 519.218.5

Траекторные методы моделирования многофазных СМО

Савинов Ю.Г.^{1,*}, Исмаилова М.В.¹,
Рослов М.Э.¹

[*uras@aport.ru](mailto:uras@aport.ru)

¹УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе развивается семимартингальный (траекторный) подход к описанию и моделированию многофазных СМО. Рассмотрены модели с блокировкой и задержкой заявок при многоэтапном обслуживании. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова: многоэтапное обслуживание, система массового обслуживания, семимартингальное описание, точечный процесс, компенсатор.

Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) занимается анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания, в системах приема, переработки и передачи информации, автоматических линиях производства [1]. При этом очень часто обслуживание может состоять в последовательном прохождении нескольких обслуживаемых приборов. Системы массового обслуживания (СМО), описывающие такого рода процессы принято называть многофазными, а обслуживание многоэтапным [2].

Существует два основных способа описания и моделирования СМО: марковский (см., например, работы [3-5]) и семимартингальный (см., например, работы [6-12]). Известно, что многофазные СМО даже с простейшим входящим потоком часто являются немарковскими. И аналитическое исследование моделей возможно только для некоторых частных случаев. Поэтому основным способом исследования многофазных СМО является имитационное моделирование. Семимартингальное (траекторное) описание многофазных СМО (в терминах считающих процессов [13]) позволяет легко переходить от математической

модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование. Выбор в пользу семимартингального описания подкрепляется еще и тем фактом, что любой случайный процесс в дискретном времени является семимартингалом [13]. Поэтому в данной работе выбрано семимартингальное описание СМО в терминах точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [13].

Чтобы продемонстрировать возможности и простоту использования семимартингального подхода рассмотрены две типичные ситуации, встречающиеся в многофазных СМО: блокировка и задержка заявок.

Блокировка означает, что узел обслуживания (обслуживаемый прибор) заблокирован, если обслуживание заявки в данном узле завершено, а следующий узел не готов к приему требования по той причине, что в ней не закончено обслуживание. Принимается также, что если узел занят или заблокирован, то очередное входящее требование встает в очередь. Таким образом в системе могут быть следующие состояния: "узел свободен", "узел занят", "узел заблокирован" [14].

Задержка означает, что в систему поступают заявки, которые после обслуживания в текущем узле отправляются на обслуживание в следующий узел не мгновенно, а со случайной, в общем случае, задержкой.

1. Математическая модель СМО с блокировкой в многоэтапном обслуживании

Рассмотрим СМО с блокировкой, в которую поступают заявки, образующие простейший поток с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ (см. рис.1). Если первый узел занят, то вновь поступившая заявка встает в очередь (размер очереди неограничен). Если второй узел занят, то заявка, завершившая обслуживание в первом узле остается в нем (блокирует поступление заявок на обслуживание в первый узел).

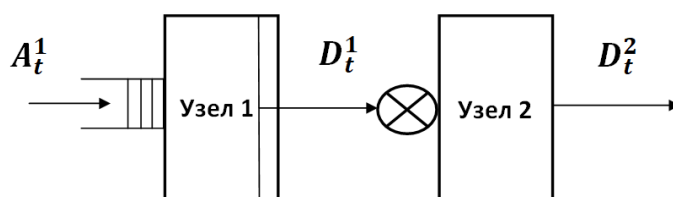


Рис.1. Схема многоэтапной СМО с блокировкой

Введем считающие процессы: $A^1 = (A_t^1)_{t \geq 0}$ - число заявок, поступивших в систему за время $t \geq 0$, $A_0^1 = 0$; $D^i = (D_t^i)_{t \geq 0}$ - число обслуженных заявок в i -том узле ($i = 1, 2$) за время $t \geq 0$, $D_0^i = 0$.

Пусть $Q^i = (Q_t^i)_{t \geq 0}$ - число заявок в i -том узле ($i = 1, 2$) в момент $t \geq 0$. То есть в момент $t \geq 0$ $Q_t^1 = 0$, если узел 1 свободен и очереди нет; $Q_t^1 = 1$, если узел 1 занят и очереди нет; вообще $Q_t^1 = k$, если узел 1 занят, и в очереди $k - 1$ заявка (k - целое положитель-

ное число). Для заявок во втором узле, в момент $t \geq 0$ $Q_t^2 = 0$, если узел 2 свободен; $Q_t^2 = 1$, если узел 2 занят, и первый узел не заблокирован; $Q_t^2 = 2$, если узел 2 занят, и заблокирован первый узел. Тогда можно написать основное балансовое соотношение для заявок в первом узле:

$$Q_t^1 = Q_0^1 + A_t^1 - D_t^1, \quad (1)$$

Аналогично, основное балансовое соотношение для заявок во втором узле:

$$Q_t^2 = Q_0^2 + D_t^1 - D_t^2, \quad (2)$$

где $Q_0^i \geq 0$ - число заявок в i -том узле ($i = 1, 2$) в момент времени $t = 0$ и $A_0^i = D_0^i = 0$.

Точечные процессы A^1, D^1, D^2 определяются своими компенсаторами $\tilde{A}^1 = (\tilde{A}_t^1)_{t \geq 0}$ и $\tilde{D}^i = (\tilde{D}_t^i)_{t \geq 0}$ в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [13]:

$$A_t^1 = \tilde{A}_t^1 + m_t^{A^1}, \quad (3)$$

$$D_t^i = \tilde{D}_t^i + m_t^{D^i}, \quad (4)$$

где \tilde{A}^1 и \tilde{D}^i - неубывающие предсказуемые процессы m^{A^1} и m^{D^i} - мартингалы, $i = 1, 2$.

Для рассматриваемой в данной работе СМО $A^1 = (A_t^1)_{t \geq 0}$ - пуассоновский процесс с компенсатором:

$$\tilde{A}_t^1 = \lambda_1 \cdot t, \quad \lambda_1 > 0. \quad (5)$$

Компенсатор для процесса $D^1 = (D_t^1)_{t \geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\tilde{D}_t^1 = \int_0^t \mu_1 I(Q_s^1 > 0, Q_s^2 \leq 1) ds, \quad (6)$$

где $I(\cdot)$ - индикаторная функция. Интенсивность обслуживания заявок в первом узле определяется числом заявок в первом и во втором узле, т.е. если второй узел уже занят заявкой, то обслужившаяся заявка из первого узла блокируется в первом узле и ожидает своей очереди.

Компенсатор для процесса $D^2 = (D_t^2)_{t \geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\tilde{D}_t^2 = \int_0^t \mu_2 I(Q_s^2 > 0) ds, \quad (7)$$

то есть заявки обслуживаются, если второй узел не свободен.

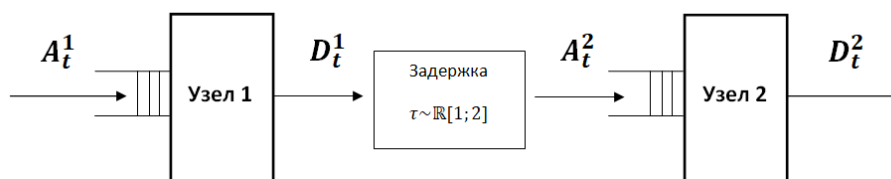


Рис.2. Схема многоэтапной СМО с задержкой

2. Математическая модель СМО с задержкой в многоэтапном обслуживании

Рассмотрим СМО с задержкой, в которую поступают заявки, образующие простейший поток с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ (см. рис.2). Заявка, обслужившаяся в первом узле, посту-

пает во второй узел с задержкой, распределенной равномерно на интервале $[1; 2]$. Если очереди нет, то она начинает обслуживаться, если узел 2 занят, то встает в очередь. Размеры очередей перед обоими узлами неограничены.

Введем считающие процессы: $A^i = (A_t^i)_{t \geq 0}$ - число заявок в i -м узле ($i = 1, 2$), поступивших в систему за время $t \geq 0$, $A_0^i = 0$; $D^i = (D_t^i)_{t \geq 0}$ - число обслуженных заявок в i -м узле ($i = 1, 2$) за время $t \geq 0$, $D_0^i = 0$.

Пусть $Q^i = (Q_t^i)_{t \geq 0}$ - число заявок в i -м узле ($i = 1, 2$) в момент $t \geq 0$. То есть в момент $t \geq 0$ $Q_t^i = 0$, если узел i свободен и очереди нет; $Q_t^i = 1$, если узел i занят и очереди нет; вообще $Q_t^i = k$, если узел i занят, и в очереди $k - 1$ заявка (k -целое положительное число).

Основное балансовое соотношение для заявок в первом узле:

$$Q_t^1 = Q_0^1 + A_t^1 - D_t^1, \quad (8)$$

Основное балансовое соотношение для заявок во втором узле в момент времени $t \geq 0$:

$$Q_t^2 = Q_0^2 + A_t^2 - D_t^2, \quad (9)$$

где $Q_0^i \geq 0$ - число заявок в i -м узле ($i = 1, 2$) в момент времени $t = 0$ и $A_0^i = D_0^i = 0$.

Для рассматриваемой в данной работе СМО $A^1 = (A_t^1)_{t \geq 0}$ - пуассоновский процесс с компенсатором:

$$\widetilde{A}_t^1 = \lambda_1 \cdot t, \quad \lambda_1 > 0, \quad (10)$$

Число заявок во втором узле определяется формулой:

$$A_t^2 = \sum_{i=1}^{D_t^1} I(t \geq \sigma_i + \tau_i), \quad (11)$$

где $\sigma_i = \inf\{t: D_t^1 = i\}$ - момент выхода i -той заявки из первого узла, $\tau_i \sim \mathbb{R}[1; 2]$ - задержка, которая происходит после обслуживания заявок в первом узле, при переходе во второй узел.

Компенсатор для процесса $D^1 = (D_t^1)_{t \geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D}_t^1 = \int_0^t \mu_1 I(Q_s^1 > 0) ds, \quad (12)$$

где $I(\cdot)$ - индикаторная функция, то есть заявки обслуживаются, если первый узел не свободен. Компенсатор для процесса $D^2 = (D_t^2)_{t \geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D}_t^2 = \int_0^t \mu_2 I(Q_s^2 > 0) ds, \quad (13)$$

заявки обслуживаются, если второй узел не свободен.

3. Компьютерная модель СМО с блокировкой в многоэтапном обслуживании

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование СМО. На стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ из формул (1)-(7) можно получить следующие соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (14)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^1 - D_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_1 \cdot I(Q_s^1 > 0, Q_s^2 \leq 1) \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (15)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^2 - D_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_2 \cdot I(Q_s^2 > 0) \cdot \Delta + o(\Delta) \quad (16)$$

Формулы (14)-(16) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda_i \cdot \Delta \ll 1, \mu_i \cdot \Delta \ll 1, i = 1,2$ получим следующие итерационные формулы (для вычисления последующих значений через предыдущие) [8]:

$$A_{t+\Delta}^1 = A_t^1 + \delta(\lambda_1), \quad (17)$$

$$D_{t+\Delta}^1 = D_t^1 + I(Q_s^1 > 0, Q_s^2 \leq 1) \cdot \delta(\mu_1), \quad (18)$$

$$D_{t+\Delta}^2 = D_t^2 + I(Q_s^2 > 0) \cdot \delta(\mu_2), \quad (19)$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Для построения компьютерной модели использовался язык программирования Delphi, построены графики входящих/исходящих потоков, числа заявок в СМО (см. рис.3).

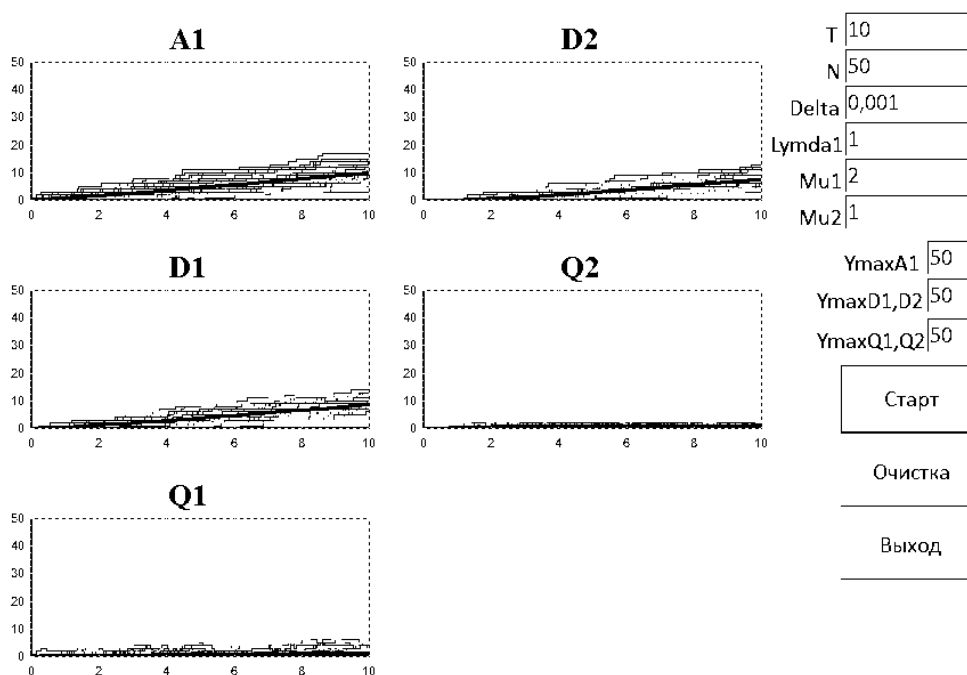


Рис.3. Форма программы с выводом всех графиков для параметров: $T = 10, N = 50, \Delta = 0,001, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$.

4. Компьютерная модель СМО с задержкой в многоэтапном обслуживании

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. Из формул (8)-(13) можно получить следующие соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (20)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^1 - D_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_1 \cdot I(Q_s^1 > 0) \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (21)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^2 - D_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_2 \cdot I(Q_s^2 > 0) \cdot \Delta + o(\Delta). \quad (22)$$

Введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda_i \cdot \Delta \ll 1, \mu_i \cdot \Delta \ll 1, i = 1,2$ получим следующие итерационные формулы [8]:

$$A_{t+\Delta}^1 = A_t^1 + \delta(\lambda_1), \quad (23)$$

$$D_{t+\Delta}^1 = D_t^1 + I(Q_s^1 > 0) \cdot \delta(\mu_1), \quad (24)$$

$$A_{t+\Delta}^2 = A_t^2 + I(\sigma[D_{t+\Delta}^1] + \tau[D_{t+\Delta}^1] = t + \Delta), \quad (25)$$

$$D_{t+\Delta}^2 = D_t^2 + I(Q_s^2 > 0) \cdot \delta(\mu_2), \quad (26)$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Для построения компьютерной модели использовался язык программирования Delphi, построены графики входящих/исходящих потоков, числа заявок в СМО (см. рис.4).

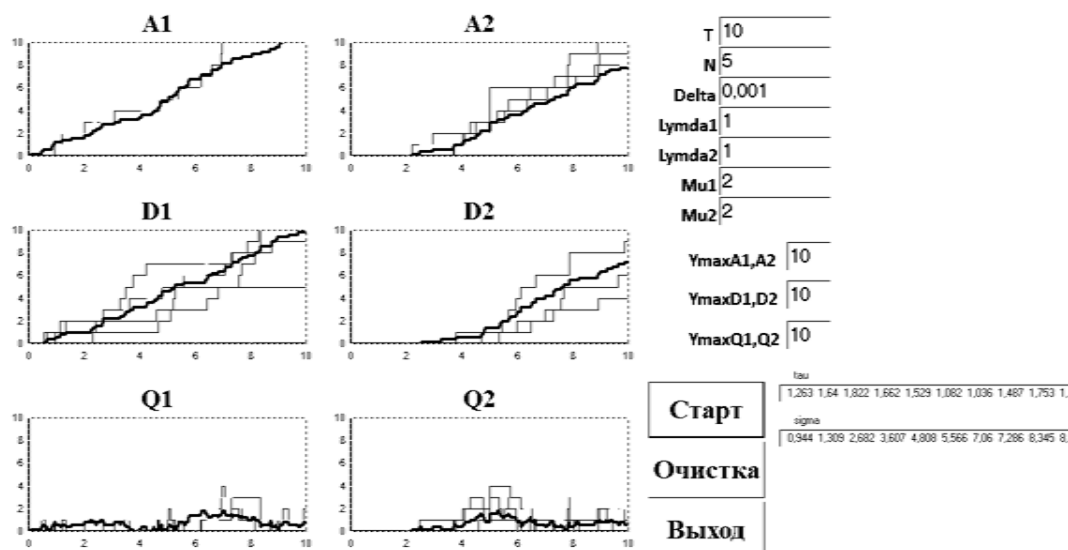


Рис.4. Форма программы с выводом всех графиков для параметров: $T = 10$, $N = 5$, $\Delta = 0,001$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

Заключение

В результате выполнения данной работы были построены модели СМО с блокировкой и задержкой при многоэтапном обслуживании. Продемонстрированы возможности и простота использования семимартингального подхода при моделировании многофазных СМО. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Список литературы

1. Кошуняева Н.В., Патронова Н.Н. *Теория массового обслуживания (практикум по решению задач)*. САФУ имени М.В. Ломоносова, 2013.
2. Бутов А.А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания: Учебно-методическое пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2007.
3. Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // *Доклады ТУСУРа*. 2012, № 2 (26), часть 2.

4. Ануфриев Д.П., Холодов А.Ю. *Статистический анализ имитационных экспериментов модели системы массового обслуживания с накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания*. Астраханский инженерно-строительный институт (ГАОУ АО ВПО «АИСИ»), 2014.
5. Гаджиев А.Г., Мамедов Т.Ш. Циклические системы с задержкой обслуживания // *Доклады Академии наук*. 2009, т. 426, № 1, с. 15-19.
6. Савинов Ю. Г., Медведева А. Н., Петров И. В., Иванов. А. М. Семимартингальные аналоги классических моделей СМО // *Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: сб. ст. по материалам XL Международной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии»*. № 4(32). М.: Изд. «Интернаука», 2016. С. 68-74
7. Столяров, И.А. Семимартингальная модель СМО с динамическим приоритетом / И.А. Столяров, Ю.Г. Савинов // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы III научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 24-25 апреля 2017 г.* Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2017. С. 553-557.
8. Савинов Ю. Г., Исмаилова М.В. Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с относительным приоритетом в обслуживании // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн.* 2017, № 1, с.54-60.
9. Савинов Ю. Г., Чурова А.А. Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с дообслуживанием заявок // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн.* 2017, № 1., с.61-69.
10. Столяров, И.А. Семимартингальная модель многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания / И.А. Столяров, Е.Д. Табакова, Ю.Г. Савинов // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. В двух частях.* Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2018. Часть 1. С. 502-506.
11. Биктимиров, Т. З., Бутов А.А., Савинов Ю.Г. Оптимальное управление моментом спонтанной регрессии // *Автоматика и телемеханика*. 2005, № 4, с. 170-175.
12. Бажанова Т.В., Савинов Ю.Г. Оценки частичного правдоподобия параметров модели многостадийного канцерогенеза // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2007, т.1, вып. 1, с. 19-24.
13. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2009.
14. Афонин В.В., Федосин С.А. *Моделирование систем* (2-е изд). Интуит, 2016.