Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 92-98.
Поступила: 26.03.2019
Окончательный вариант: 07.05.2019

УДК 519.218.5

Оптимизация в СМО с нетерпеливыми заявками

Савинов Ю.Г.[1,*], ***Табакова Е.Д.***[1], ***Сафиуллов И.Д.***[1]

[*]uras@aport.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена оптимизация в математической модели многоканальной СМО с нетерпеливыми заявками, описанной в терминах точечных процессов. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, нетерпеливые заявки, оптимизация, семимартингальное описание, точечный процесс, компенсатор.*

Введение

Системы массового обслуживания (СМО), в которых время ожидания в очереди или пребывания в системе (и в очереди, и под обслуживанием) ограничено, принято называть СМО с «нетерпеливыми» заявками. Практический и теоретический интерес (см., например, [1-5] и ссылки в них) к таким системам обусловлен возможностью их широкого применения.

Работ с оптимизацией в СМО тоже достаточно много (см., например, [6-7] и ссылки в них). С другой стороны, оптимизационные модели в многоканальных СМО с «нетерпеливыми» заявками практически не представлены в литературе.

Это связано, на наш взгляд, с двумя причинами. Во-первых, СМО с «нетерпеливыми» заявками являются зачастую немарковскими и аналитическое исследование таких моделей сильно затруднено и возможно лишь для небольшого количества частных случаев. Поэтому основным способом исследования таких СМО является имитационное моделирование. Но в традиционных средах имитационного моделирования (GPSS, AnyLogic и т.д.) нет встроенных средств моделирования «нетерпения». Это вторая причина. Для многоканальных немарковских СМО с нетерпеливыми заявками можно, конечно, применять аппроксимацию непоказательных распределений распределениями фазового типа [8], но сложность таких аппроксимаций быстро растет с увеличением числа каналов в СМО.

В данной работе представлена модель СМО с «нетерпеливыми» заявками и оптимизацией числа обслуживающих каналов в семимартингальных терминах [9]. Семимартингальное (траекторное) описание СМО (в терминах считающих процессов и их компенсаторов [9-13]) позволяет легко переходить от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование, а сложность математической и компьютерной модели практически не растет с ростом числа каналов в СМО.

Чтобы продемонстрировать возможности и простоту использования семимартингального подхода, рассмотрен классический случай Баррера [14-15] с постоянным временем «терпения». Случай произвольного распределение времени ожидания «нетерпеливых» заявок будет рассмотрен в последующих публикациях.

1. Постановка задачи

Данная работа является продолжением работы [13], только вместо «нетерпеливости» времени ожидания рассматривается случай «нетерпеливости» времени пребывания в СМО. Рассмотрим систему массового обслуживания с ограниченным временем пребывания $\tau = \mathrm{const}$, с пуассоновским входящим потоком с интенсивностью $\lambda > 0$, состоящую из n приборов и имеющую общую неограниченную очередь. Обслуживание экспоненциальное с интенсивностью $\square > 0$. Согласно бесприоритетной дисциплине обслуживания, выбор заявок из очереди на обслуживание осуществляется в порядке поступления в систему по правилу FIFO. Система имеет неограниченную очередь, то есть, если в системе нет свободных приборов, то заявка отправляется в очередь и там ожидает обслуживания. Далее, если заявка пробудет в системе не дольше, чем τ, то она получит обслуживание, иначе – уйдет из системы, либо совсем не дождавшись обслуживания, либо получив его только частично, так как время пребывания заявки в системе ограничено значением τ.

Очевидно, что при увеличении количества приборов, количество «нетерпеливых» отказов будет уменьшаться, соответственно, большее количество заявок сможет обслужиться и принести прибыль (в экономической интерпретации). С другой стороны, с ростом числа количества приборов растет и оплата за обслуживание приборов. Возникает задача поиска компромисса между ростом количества приборов (выгода от уменьшения «нетерпеливых» отказов) и оплатой за обслуживание большего количества приборов.

Рассмотрим функционал потерь

$$\Phi(n,T) = \alpha \cdot n \cdot T + \beta \cdot F(n,T), \tag{1}$$

где константы $\alpha, \beta > 0$, T – время работы СМО, n – количество приборов, $F(n,T)$ – число «нетерпеливых» отказов за время T. Первое слагаемое – это плата за обслуживание n приборов за время T. Второе слагаемое – это упущенная прибыль от «нетерпеливо» ушедших за время T заявок. Требуется методами имитационного моделирования провести целочисленную оптимизацию работы СМО, найдя значения n, доставляющие минимум функционалу (1).

2. Математическая модель

Опишем модель СМО с нетерпеливыми заявками для n приборов (см. рис.1).

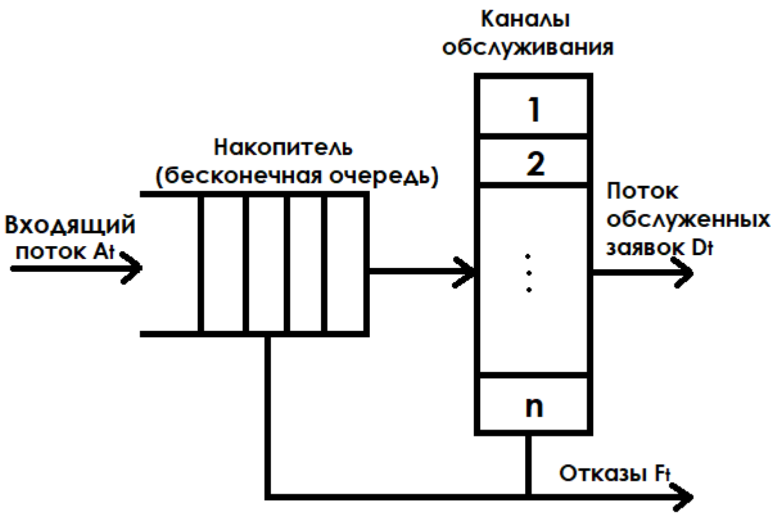


Рис.1. Схема многоканальной СМО с нетерпеливыми заявками для n приборов

Для описания СМО с ограниченным временем пребывания введём считающие процессы [9]: $A = (A_t)_{t\geq 0}$ – число заявок, поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0 = 0$, $D = (D_t)_{t\geq 0}$ – число обслуженных заявок в СМО за время $t \geq 0$, $D_0 = 0$, $F = (F_t)_{t\geq 0}$ – число заявок, которые «нетерпеливо» покинули СМО за время $t \geq 0$, $F_0 = 0$.

Тогда для ξ_t – числа заявок в СМО в момент времени $t \geq 0$ можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t = \xi_0 + A_t - D_t - F_t \, , \qquad (2)$$

где $\xi_0 \geq 0$ - число заявок в СМО при $t = 0$. Точечные процессы A, D определяются своими компенсаторами $\tilde{A} = (\tilde{A}_t)_{t\geq 0}$ и $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_t)_{t\geq 0}$ в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [9]:

$$A_t = \tilde{A}_t + m_t^A, \qquad (3)$$

$$D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D, \qquad (4)$$

где $\tilde{A}$ и $\widetilde{D}$ - неубывающие предсказуемые процессы, m_t^A и m_t^D- мартингалы.

Для рассматриваемой в данной работе СМО с нетерпеливыми заявками $A = (A_t)_{t\geq 0}$ - пуассоновский процесс с компенсатором:

$$\tilde{A}_t = \lambda \cdot t, \ \lambda > 0. \qquad (5)$$

Компенсатор для процесса определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t \mu \cdot min(\xi_s, n)\ ds\,, \tag{6}$$

то есть интенсивность обслуживания заявок определяется числом заявок, находящихся в СМО и числом обслуживающих приборов. Каждая заявка, поступающая в систему обслуживания, может находиться в системе не более чем время τ. Для того, чтобы новая заявка обслужилась, необходимо, чтобы заявки (включая новую заявку и те, которые пришли раньше неё) успели обслужиться за время τ. Соответственно, число заявок, которые не дождались обслуживания за время $\tau + t$, можно определить по формуле:

$$F_{t+\tau} = \int_0^t (I(D_{s+\tau} - D_s) < \xi_{s-})dA_s, \tag{7}$$

где ξ_{t-}– число заявок в СМО в момент прихода заявки в момент времени t, τ – время пребывания. Другими словами, для того, чтобы заявка, пришедшая в момент времени t, ушла из СМО в момент времени $t+\tau$, необходимо и достаточно, чтобы за время от t до $t+\tau$ было обслужено не больше чем ξ_{t-} заявок (то есть к моменту $t+\tau$ обслуживание либо не завершилось, либо не успело начаться), где ξ_{t-} - число заявок в СМО в момент прихода новой заявки.

3. Результаты компьютерного моделирования

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. Из формул (2)-(6) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения [9-10]:

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{8}$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \min(n, \xi_t) \cdot \mu \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{9}$$

Введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda \cdot \Delta \ll 1, n\mu \cdot \Delta \ll 1$, получим следующие итерационные формулы (10)-(11).

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda), \tag{10}$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta(\min(n, \xi_t)\mu), \tag{11}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Чтобы получить итерационную формулу для F продифференцируем (7): $dF_{t+\tau} = (I(D_{t+\tau} - D_t) < \xi_{t-})dA_t$. Заменим дифференциалы конечными разностями:

$$\Delta F_{t+\tau} = I(D_{t+\tau} - D_t \le \xi_{t-})\Delta A_t \text{, где } \Delta A_t = A_{t+\Delta} - A_t,$$

$$F_{t+\tau+\Delta} - F_{t+\tau} = I(D_{t+\tau} - D_t \le \xi_{t-})\Delta A_t,$$

$$F_{t+\tau+\Delta} = F_{t+\tau} + I(D_{t+\tau} - D_t \le \xi_{t-})\Delta A_t. \tag{12}$$

Формула (12) позволяет пересчитывать значение F при переходе от $t+\tau$ к $t+\tau+\Delta$. Очевидно, что при $0 \le t < \tau$ $F_t = 0$.

Замечание. При моделировании можно считать СМО без F $(F = 0)$ до времени τ, после этого в момент $\tau + \Delta$ моделируется $F_{\tau+\Delta}$ по формуле (12), используя сохраненные значения в предыдущие моменты времени *(нужно знать* D_τ, $D_0, \Delta A_0 = A_\Delta - A_0, F_\tau = 0, \xi_0$*)* и т.д.

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью программы, реализованной в среде Delphi 7 (см. рис. 2).

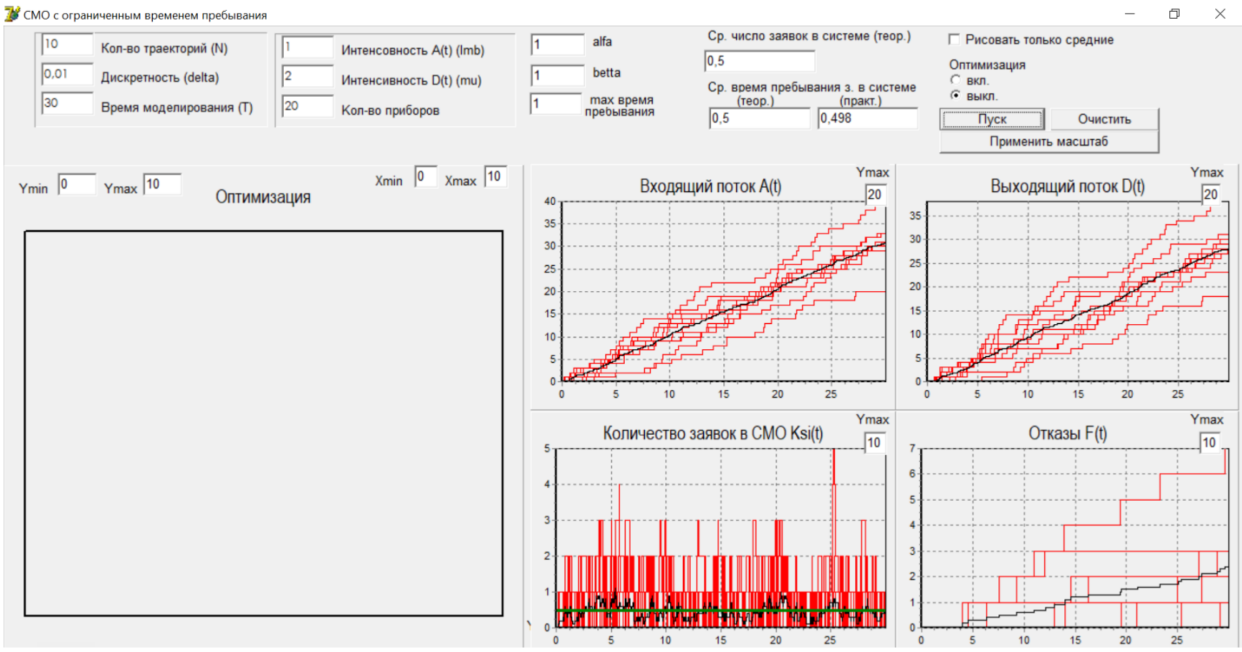
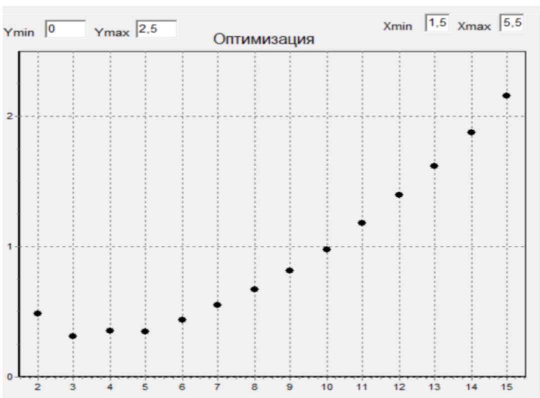


Рис.2. Диалоговое окно программы. Практическая реализация оптимизации в СМО с «нетерпеливыми» заявками в среде Delphi



По оси Ох указано количество приборов n, по оси Оу – значения функционала потерь $\Phi(n,T)$, усредненые по 100 прогонам программы, имитирующей работу СМО в течение времени T.

Рис.3. Оптимизация при параметрах: T =30, Δ=0,01, λ =1, [illegible] =3 , n =1…15 (при $n = 1$ значение функционала больше 10 и не представлено на рисунке).

На рис. 3 представлены результаты моделирования функционала $\Phi(n,T)$. Видно, что при увеличении количества приборов до оптимального ($n = 3$) значение $\Phi(n,T)$

уменьшается, дальнейшее увеличение количества приборов нецелесообразно, так как выгода от уменьшения количества необслуженных заявок не компенсируется стоимостью обслуживания большого количества приборов.

Список литературы

1. Hoshi K., Iijima S., Takahashi Y., Komatsu N. Traffic Performance for a Time-Out Scheme Communication System // *Proc. of International Conference ICUMT 2009*. St. Petersburg, 2009, p. 1-6.
2. Дудин С.А., Дудина О.С. Модель функционирования колл-центра как система MAP/PH/N/R-N с нетерпеливыми запросами // *Проблемы передачи информации*. 2011, № 47, с. 68-83.
3. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Имитационное моделирование систем с «нетерпеливыми» заявками // *Имитационное моделирование. Теория и практика : тр. VI Всерос. конф.* Казань, 2013, с. 339-342.
4. Кирпичников А.П., Флакс Д.Б., Валеева Л.Р. Системы массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. 2015, №1, с. 68-73 .
5. Малышев Д.А., Таранцев А.А., Холостов А.Л. Моделирование работы дежурнодиспетчерских служб с учетом ограничения времени ожидания абонентов // *Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация*. 2017, № 4, С. 23-27.
6. Бояршинова И.Н., Исмагилов Т.Р., Потапова И.А. Моделирование и оптимизация работы системы массового обслуживания // *Фундаментальные исследования*. 2015, № 9-1, с. 9-13. Режим доступа: http://fundamental-research.ru/ru/article/view?id =38956 (дата обращения: 22.03.2019).
7. Бобков С.П., Урюпина Н.М. Оптимизация структуры системы массового обслуживания // *Современные наукоемкие технологии (региональное приложение),* 2006, № 3, с. 5-9. Режим доступа: http://main.isuct.ru/files/publ/snt/2006/03/HTM/5.htm (дата обращения: 22.03.2019).
8. Roubos A. Call Centers with Hyperexponential Patience Modeling / A. Roubos, O. Jouini // *International Journal of Production Economics.* 2013, v.141, p. 307–315.
9. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2009.
10. Савинов Ю. Г. Семимартингальные аналоги классических моделей СМО / Ю. Г. Савинов, А. Н. Медведева, И. В. Петров, А. М. Иванов // *Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: сб. ст. по материалам XL Международной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии»*. № 4(32). М.: Изд. «Интернаука», 2016. С. 68-74.
11. Савинов Ю. Г., Исмаилова М.В. Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с относительным приоритетом в обслуживании // *Ученые записки Ул-*

ГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2017, № 1, с. 54-60.

12. Савинов Ю. Г., Чурова А.А. Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с дообслуживанием заявок // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн*. 2017, № 1, с. 61-69.
13. Столяров И.А. Семимартингальная модель многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания / И.А. Столяров, Е.Д. Табакова, Ю.Г. Савинов // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. В двух частях*. Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2018, часть 1, с. 502-506.
14. Barrer D.Y. Queuing with Impatient Customers and Indifferent Clerks // *Operation Research*. 1957, V. 5, № 5, p. 294-400.
15. Гнеденко Б.В. Несколько замечаний к двум работам Д.Баррера // *Buletinul Institutului Politehnic, din iasi, seria noua*, t.5(9), fas.1-2, p.111-118.