Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 99-109.

Поступила: 12.05.2019
Окончательный вариант: 05.06.2019

УДК 621.3

Автокорреляционные функции и средне-квадратичные отклонения выходного параметра электромеханической системы

Санкин Н. Ю. [1,*]

[*]sankin66@@mail.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

Работа посвящена разработке способа расчета автокорреляционной функции и среднеквадратичного отклонения выходного параметра электромеханической системы, как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, позволяющему строить, например, переходные процессы в электрической цепи в зависимости от напряжения, исследовать устойчивость работы электромеханических систем.

Ключевые слова: *автокорреляционная функция, среднеквадратичное отклонение выходного параметра электромеханической системы, сложная электрическая цепь, математическое моделирование.*

В практике расчета современных динамических систем интенсивно используются статистические методы. Применение статистических методов и методов теории случайных функций, позволяют рассчитывать системы так, чтобы она не только успешно противостояла помехам, но и успешно работала при наличии спектра возможных воздействий, которые возникают в реальных условиях работы системы. Сказанное, прежде всего, относится к оценке работы электрических сетей, электропривода, а так же металлообрабатывающего оборудования и наземных транспортных средств. Динамические характеристики вышеуказанных объектов часто моделируются в виде суммы колебательных звеньев. В связи с этим, в данной главе рассматривается задача о случайных колебаниях системы при действии стационарного случайного процесса, передаточная функция которой моделируется в виде суммы колебательных звеньев, умноженных на форсирующее звено, при чем форсирующее звено может в принципе и отсутствовать.

Поведение колебательной системы второго порядка при случайных возмущениях хорошо изучено [2]. Однако существуют системы, где существенно проявляют себя несколько степеней свободы. К таковым относятся, например, металлорежущие станки, электрические линии.

При исследовании поведения колебательных объектов при случайных возмущениях обычно интересуются среднеквадратичными отклонениями [2]. Для вычисления средне-квадратичных отклонений необходимо знать соответствующие корреляционные функции [1, 5]. В предлагаемой работе осуществляется вычисление корреляционной функции сложной электромеханической системы, передаточные функции которой могут быть представлены в виде суммы колебательных звеньев [4].

Дифференциальное уравнение сложной электромеханической системы при случайном возмущении в матричном виде [88]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t),$$

где m – матрица масс и индуктивностей;

b – матрица рассеяния энергии и сопротивлений;

c – матрица жесткостей системы и емкостных сопротивлений;

x – вектор перемещений и зарядов;

$f(t)$ – вектор возмущающих воздействий.

Решая задачу о вынужденных колебаниях, строим АФЧХ. Для этого, полагая $f(t) = ke^{j\omega t}$, $x = Xe^{j\omega t}$, решаем систему уравнений:

$$\left(-m\omega^2 + j\omega b + c\right)X = k, \tag{1}$$

где X – вектор амплитуд. Формально решение системы (1), если $b = \alpha_1 m + \alpha_2 b + b_1$, где $\|b_1\| << \|b\|$, можно записать в виде:

$$X = \left(-m\omega^2 + j\omega b + c\right)^{-1} k \approx \sum_{n=1}^{s} \frac{k_n}{-T_{2n}^2\omega^2 + T_{1n} j\omega + 1}, \tag{2}$$

где s – число степеней свободы электромеханической системы. Величина

$$W(p) = \sum_{n=1}^{s} \frac{k_n}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1} \tag{3}$$

представляет собой передаточную функцию системы.

Преимуществом записи (2) является то, что не все члены под знаком суммы равно-правны. В выражении (2) реально проявляется не более трех, четырех членов.

Если известна передаточная функция интересующего элемента электромеханической системы и спектральная плотность $S_u(\omega)$ случайного входного воздействия, тогда для спектральной плотности перемещения или заряда получим следующее выражение:

$$S_{xx} = \left|W(j\omega)\right|^2 S_u(\omega), \tag{4}$$

где

$$\left|W(j\omega)\right|^2 = \sum_{n=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} \frac{k_n k_m}{\left(-T_{2n}^2\omega^2 + jT_{1n}\omega + 1\right)\left(-T_{2m}^2\omega^2 - jT_{1m}\omega + 1\right)}. \tag{5}$$

Рассмотрим определение корреляционной функции стационарных случайных колебаний сложной электромеханической системы. Пусть колебания некоторого элемента описываются линейным дифференциальным уравнением [27]:

$$Q_n(p)X(t)=P_d(p)u, \tag{6}$$

где p – оператор дифференцирования; $u=u(t)$ – случайное возмущение, обладающее свойствами белого шума;

$$Q_s(p)=p^s+a_1p^{s-1}+\ldots+a_s; \tag{7}$$

$$P_d(p)=b_0p^d+b_1p^{d-1}+\ldots+b_d. \tag{8}$$

Коэффициенты многочленов (7) и (8) постоянны, при этом $d<s$. Согласно общей формуле спектральная плотность выходного сигнала будет:

$$S_{xx}(\omega)=\frac{\left|P_d(j\omega)\right|^2}{\left|Q_s(j\omega)\right|^2}c, \tag{9}$$

где c – спектральная плотность входного сигнала, обладающего свойством белого шума, для которого в диапазоне частот, существенном для рассматриваемой динамической системы, можно считать $c=const$.

Автокорреляционная функция $R_{xx}(\tau)$ находится как обратное преобразование Фурье:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}\frac{\left|P_d(j\omega)\right|^2}{\left|Q_s(j\omega)\right|^2}d\omega, \tag{10}$$

где τ – интервал времени, разделяющий произвольные моменты времени наблюдения случайного процесса.

Интеграл (10) вычисляется в конечном виде с помощью теоремы вычетов.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$Q_s(\lambda)=0. \tag{11}$$

Обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Тогда знаменатель в формуле (9) можно представить в виде:

$$\left|Q_s(j\omega)\right|^2=\prod_{m=1}^{s}(-\lambda_m+j\omega)\left(-\lambda_m^*-j\omega\right)=R_s(j\omega)R_s^*(-j\omega), \tag{12}$$

где $R_s(j\omega)=\prod_{m=1}^{s}(-\lambda_m+j\omega)$; $R_s^*(-j\omega)=\prod_{m=1}^{s}\left(-\lambda_m^*-j\omega\right)$; λ_m^* – комплексное сопряженное к λ_m.

Так как рассматривается устойчивая система, то вещественная часть всех корней λ_m – отрицательные. Поэтому многочлен $R_s(z)$ комплексного переменного z будет иметь корни в левой полуплоскости, а многочлен $R_s^*(-z)$ – в правой полуплоскости.

Вместо интеграла (10) рассмотрим интеграл от функции комплексного переменного z:

$$\frac{c}{2\pi j}\int\limits_{L} e^{z\tau}\frac{P_d(z)P_d(-z)}{R_s(z)R_s(-z)}dz, \tag{13}$$

где $P_d(z)$ – полином от z, полученный заменой $j\omega$ на z. Контур L состоит из отрезка мнимой оси, замкнутого полуокружностью радиуса r, расположен в левой полуплоскости (рис.1). Так как $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$, для вещественного процесса, то достаточно рассмотреть τ одного знака. Пусть $\tau > 0$.

В левой полуплоскости при $X<0$, $e^{x\tau}$ меньше единицы, а модуль дроби $\frac{P_d(z)P_d(-z)}{R_s(z)R_s(-z)}$ при росте $|z|$ стремится к нулю не медленнее, чем $1/|z|$.

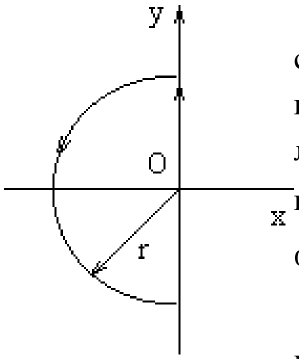

Рис. 1. Контур L

Тогда при $r\to\infty$ часть интеграла (13) по окружности будет стремиться к нулю, а сам интеграл (13) будет стремиться к интегралу (10). Поскольку под знаком интеграла (13) находится аналитическая функция комплексной переменной z, то сам интеграл равен сумме вычетов c_{-1m} относительно полюсов этой функции, лежащих в левой полуплоскости, умноженных на $2\pi j$.

Так как корнями знаменателя, являющимися этими полюсами будут корни полинома $R_s(z)$, то для нахождения вычета c_{-1m} соответствующего m–му полюсу, достаточно умножить интегрируемую функцию на $(z-\lambda_m)$ и положить затем $z=\lambda_m$. Тогда для $\tau>0$ получим:

$$R_{xx}(\tau)=c\sum_{m=1}^{s}e^{\lambda_m\tau}\frac{P_d(\lambda_m)P_d(-\lambda_m)}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{s}(\lambda_m-\lambda_l)R_s^*(-\lambda_m)}. \tag{14}$$

Здесь учтено, что $dz=jd\omega$. Для нахождения $R_{xx}(\tau)$ при $\tau<0$ берем вместо (14) его комплексное сопряженное значение и меняем знак τ.

Для нахождения дисперсии полагаем в (14) $\tau=0$. Тогда:

$$R_{xx}(0)=c\sum_{m=1}^{s}\frac{P_d(\lambda_m)P_d(-\lambda_m)}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{s}(\lambda_m-\lambda_l)R_s^*(-\lambda_m)}. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) применимы, если спектральная плотность входного воздействия отличается от белого шума.

Рассмотрим колебательную систему с двумя степенями свободы и следующей передаточной функцией:

$$W(p)=\frac{k_1}{-T_{21}^2p^2+jT_{11}p+1}+\frac{k_2}{T_{22}^2p^2+jT_{21}p+1}.$$

$$\begin{aligned}|W(j\omega)|^2 &= \frac{k_1k_1}{\left(-T_{21}^2\omega^2+jT_{11}\omega+1\right)\left(-T_{21}^2\omega^2-jT_{11}\omega+1\right)}+\\ &+\frac{k_1k_2}{\left(-T_{21}^2\omega^2+jT_{11}\omega+1\right)\left(-T_{22}^2\omega^2-jT_{12}\omega+1\right)}+\\ &+\frac{k_2k_1}{\left(-T_{22}^2\omega^2+jT_{21}\omega+1\right)\left(-T_{21}^2\omega^2-jT_{11}\omega+1\right)}+\\ &+\frac{k_2k_2}{\left(-T_{22}^2\omega^2+jT_{21}\omega+1\right)\left(-T_{22}^2\omega^2-jT_{21}\omega+1\right)}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Характеристические уравнения имеют вид:

$$\lambda^2+2n_1\lambda+\omega_1^2=0,$$
$$\lambda^2+2n_2\lambda+\omega_2^2=0.$$

Корни этих характеристических уравнений равны

$$\lambda_{1,2}=-n_1\pm j\sqrt{\omega_1^2-n_1^2}=-n_1\pm j\omega_1,$$
$$\lambda_{3,4}=-n_2\pm j\sqrt{\omega_2^2-n_2^2}=-n_2\pm j\omega_2.$$

Составляющие автокорреляционной функция для перекрестных членов выражения (16) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{k_1k_2}{T_{21}^2T_{22}^2}\Bigg\{ & e^{(-n_1+j\omega_1)|\tau|}\frac{1}{2j\omega_1\left(n_1-j\omega_1+n_2+j\omega_2\right)\left(n_1-j\omega_1+n_2-j\omega_2\right)}+\\ &+e^{(-n_1-j\omega_1)|\tau|}\frac{1}{-2j\omega_1\left(n_1+j\omega_1+n_2+j\omega_2\right)\left(n_1+j\omega_1+n_2-j\omega_2\right)}+\\ &+e^{(-n_2+j\omega_2)|\tau|}\frac{1}{2j\omega_2\left(n_2-j\omega_2+n_1+j\omega_1\right)\left(n_2-j\omega_2+n_1-j\omega_1\right)}+\\ &+e^{(-n_2-j\omega_2)|\tau|}\frac{1}{-2j\omega_2\left(n_2+j\omega_2+n_1+j\omega_1\right)\left(n_2+j\omega_2+n_1-j\omega_1\right)}\Bigg\}.\end{aligned} \qquad (17)$$

Рассмотрим первые два члена (17):

$$\begin{aligned}& e^{(-n_1+j\omega_1)|\tau|}\frac{1}{2j\omega_1\left(n_1-j\omega_1+n_2+j\omega_2\right)\left(n_1-j\omega_1+n_2-j\omega_2\right)}+\\ &+e^{(-n_2+j\omega_2)|\tau|}\frac{1}{2j\omega_2\left(n_2-j\omega_2+n_1+j\omega_1\right)\left(n_2-j\omega_2+n_1-j\omega_1\right)}.\end{aligned}$$

Учтем, что

$$e^{(-n+j\omega)|\tau|}=e^{-n|\tau|}\left(\cos\omega\tau+j\sin\omega\tau\right),\ e^{(-n-j\omega)|\tau|}=e^{-n|\tau|}\left(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau\right).$$

Тогда

$$e^{-n_1|\tau|}\left\{\frac{\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|}{2j\omega_1\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1-\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1+\omega_2)\right]}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\omega_1\tau - j\sin\omega_1|\tau|}{-2j\omega_1\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1+\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1-\omega_2)\right]}\right\}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega}\left\{\frac{(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1+\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1-\omega_2)\right]}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{-(\cos\omega_1\tau - j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1-\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1+\omega_2)\right]}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\right\}=$$

$$=\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega}\left\{\frac{(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1-\omega_2)(n_1+n_2)-(\omega_1^2-\omega_2^2)\right.}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}+\right.$$

$$\frac{\left.+j(\omega_1+\omega_2)(n_1+n_2)\right]-(\cos\omega_1\tau - j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)^2-j(\omega_1-\omega_2)(n_1+n_2)\right.}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}-$$

$$\left.-\frac{(\omega_1^2-\omega_2^2)-j(\omega_1+\omega_2)(n_1+n_2)}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\right\}=$$

$$=\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega}\left\{\frac{(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1^2-\omega_2^2)\right.}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left.2j\omega_1(n_1+n_2)\right]-(\cos\omega_1\tau - j\sin\omega_1|\tau|)\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1^2-\omega_2^2)-2j\omega_1(n_1+n_2)\right)}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\right\}.$$

Преобразуем числитель этого выражения:

$$(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|)(a+jb)-(\cos\omega_1\tau - j\sin\omega_1|\tau|)(a-jb)=$$

$$=a\cos\omega_1\tau + jb\cos\omega_1\tau + ja\sin\omega_1|\tau| - a\sin\omega_1|\tau| - a\cos\omega_1.\tau + jb\cos\omega_1\tau +$$

$$+ja\sin\omega_1|\tau| + a\sin\omega_1|\tau| = 2aj\sin\omega_1|\tau| + 2jb\cos\omega_1\tau.$$

$$a=(n_1+n_2)^2-(\omega_1^2-\omega_2^2),\ b=2\omega_1(n_1+n_2).$$

Тогда

$$\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega}\left\{\frac{2j\left[\left(n_1+n_2\right)^2-\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\right]\sin\omega_1|\tau|+2j2\omega_1\left(n_1+n_2\right)\cos\omega_1\tau}{\left[\left(n_1+n_2\right)^2+\left(\omega_1-\omega_2\right)^2\right]\left[\left(n_1+n_2\right)^2+\left(\omega_1+\omega_2\right)^2\right]}\right\}=$$

$$=\frac{e^{-n_1|\tau|}}{\omega}\left\{\frac{\left[\left(n_1+n_2\right)^2-\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\right]\sin\omega_1|\tau|+2\omega_1\left(n_1+n_2\right)\cos\omega_1\tau}{\left[\left(n_1+n_2\right)^2+\left(\omega_1-\omega_2\right)^2\right]\left[\left(n_1+n_2\right)^2+\left(\omega_1+\omega_2\right)^2\right]}\right\}.$$

Для вторых двух членов формулы (17) преобразования будут аналогичными. Автокорреляционная функция в общем виде запишется так:

$$R_{xx}(\tau)=c\sum_{n=1}^{d}\sum_{m=1}^{d}\frac{k_n k_m}{T_{2n}^2T_{2m}^2}\frac{e^{-n|\tau|}}{2\omega_n}\left[\frac{\left[\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right]\sin\omega_n|\tau|+}{\left[\left(n_n+n_m\right)^2+\left(\omega_n-\omega_m\right)^2\right]}\right.$$
$$\left.\frac{+2\omega_n\left(n_n+n_m\right)\cos\omega_n\tau}{\left[\left(n_n+n_m\right)^2+\left(\omega_n+\omega_m\right)^2\right]}\right]. \tag{18}$$

В частности, для системы с одной степенью свободы, автокорреляционная функция будет [27]:

$$R_{xx}(\tau)==\frac{ce^{-n|\tau|}}{4n\left(n^2+\omega^2\right)}\left(\cos\omega\tau+\frac{n}{\omega}\sin\omega|\tau|\right). \tag{19}$$

Формулы (18) и (19) могут быть также полезны при исследовании, например, случайных колебаний транспортных средств, а также при обработке записей случайных процессов, когда следует отделить характеристики измерительных цепей.

Рассмотрим передаточную функцию с форсирующим звеном:

$$W(p)=\frac{k_1\left(T_1^0p+1\right)}{T_{21}^2p^2+T_{11}p+1}+\frac{k_2\left(T_2^0p+1\right)}{T_{22}^2p^2+T_{21}p+1}.$$

$$\left|W(j\omega)\right|^2=\frac{k_1k_1\left(T_1^0j\omega+1\right)\left(-T_1^0j\omega+1\right)}{\left(-T_{21}^2\omega^2+jT_{11}\omega+1\right)\left(-T_{21}^2\omega^2-jT_{11}\omega+1\right)}+$$
$$+\frac{k_1k_2\left(T_1^0j\omega+1\right)\left(-T_2^0j\omega+1\right)}{\left(-T_{21}^2\omega^2+jT_{11}\omega+1\right)\left(-T_{22}^2\omega^2-jT_{12}\omega+1\right)}+$$
$$+\frac{k_2k_1\left(T_2^0j\omega+1\right)\left(-T_1^0j\omega+1\right)}{\left(-T_{22}^2\omega^2+jT_{21}\omega+1\right)\left(-T_{21}^2\omega^2-jT_{11}\omega+1\right)}+$$
$$+\frac{k_2k_2\left(T_2^0j\omega+1\right)\left(-T_2^0j\omega+1\right)}{\left(-T_{22}^2\omega^2+jT_{21}\omega+1\right)\left(-T_{22}^2\omega^2-jT_{21}\omega+1\right)}.$$

Составляющие автокорреляционной функции для перекрестных членов запишутся так:

$$\frac{k_1k_2}{T_{21}^2T_{22}^2}\left\{e^{(-n_1+j\omega_1)|\tau|}\frac{\left(T_1^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)}{2j\omega_1(n_1-j\omega_1+n_2+j\omega_2)(n_1-j\omega_1+n_2-j\omega_2)}+\right.$$

$$+e^{(-n_1-j\omega_1)|\tau|}\frac{\left(T_1^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)}{-2j\omega_1(n_1+j\omega_1+n_2+j\omega_2)(n_1+j\omega_1+n_2-j\omega_2)}+$$

$$+e^{(-n_2+j\omega_2)|\tau|}\frac{\left(-T_1^0(-n_2+j\omega_2)+1\right)\left(T_2^0(-n_2+j\omega_2)+1\right)}{2j\omega_2(n_2-j\omega_2+n_1+j\omega_1)(n_2-j\omega_2+n_1-j\omega_1)}+$$

$$\left.+e^{(-n_2-j\omega_2)|\tau|}\frac{\left(-T_1^0(-n_2-j\omega_2)+1\right)\left(T_2^0(-n_2-j\omega_2)+1\right)}{-2j\omega_2(n_2+j\omega_2+n_1+j\omega_1)(n_2+j\omega_2+n_1-j\omega_1)}\right\}.$$

Рассмотрим первый перекрестный член, так как остальные имеют такую же структуру.

$$\frac{k_1k_2}{T_{21}^2T_{22}^2}\left\{e^{(-n_1+j\omega_1)|\tau|}\frac{\left(T_1^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)}{2j\omega_1\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1-\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)-j(\omega_1+\omega_2)\right]}+\right.$$

$$\left.+e^{(-n_1-j\omega_1)|\tau|}\frac{\left(T_1^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)}{-2j\omega_1\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1+\omega_2)\right]\left[(n_1+n_2)+j(\omega_1-\omega_2)\right]}\right\}=$$

$$=\frac{k_1k_2}{T_{21}^2T_{22}^2}\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega_1}\left\{\frac{1}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\times\right.$$

$$\times\left[(\cos\omega_1\tau+j\sin\omega_1|\tau|)\left(T_1^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\times\right.$$

$$\times\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2+2j\omega_1(n_1+n_2)\right]-(\cos\omega_1\tau-j\sin\omega_1|\tau|)\times$$

$$\times\left(T_1^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2-2j\omega_1(n_1+n_2)\right]\times$$

$$\times\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2+2j\omega_1(n_1+n_2)\right]-(\cos\omega_1\tau-j\sin\omega_1|\tau|)\times$$

$$\left.\left.\times\left(T_1^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1-j\omega_1)+1\right)\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2-2j\omega_1(n_1+n_2)\right]\right]\right\}.$$

Затем рассмотрим первую составляющую этого выражения и удвоим ее.

$$\frac{e^{-n_1|\tau|}}{2j\omega_1}\left\{\frac{1}{\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2\right]}\times\right.$$

$$\times(\cos\omega_1\tau+j\sin\omega_1|\tau|)\left(T_1^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1+j\omega_1)+1\right)\times$$

$$\left.\times\left[(n_1+n_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2+2j\omega_1(n_1+n_2)\right]\right\}.$$

Упростим выражение:

$$\left(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|\right)\left(T_1^0(-n_1 + j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1 + j\omega_1)+1\right)$$
$$\left[(n_1+n_2)^2 - (\omega_1-\omega_2)^2 + 2ji\omega_1(n_1+n_2)\right]$$

Введем обозначения:

$$a = (n_1+n_2)^2 - (\omega_1-\omega_2)^2,$$
$$b = 2\omega_1(n_1+n_2).$$

Тогда

$$\left(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|\right)\left(T_1^0(-n_1 + j\omega_1)+1\right)\left(-T_2^0(-n_1 + j\omega_1)+1\right)(a+jb) =$$
$$\left(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|\right)\left(-T_1^0T_2^0(-n_1 + j\omega_1)^2 + T_1^0(-n_1 + j\omega_1) - T_2^0(-n_1 + j\omega_1)+1\right)(a+jb) =$$
$$\left(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|\right)\left(-T_1^0T_2^0\left(n_1^2 - 2jn_1\omega_1 - \omega_1^2\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)(-n_1 + j\omega_1)+1\right)(a+jb) =$$
$$=\left(\cos\omega_1\tau + j\sin\omega_1|\tau|\right)\left(-T_1^0T_2^0\left(n_1^2 - 2jn_1\omega_1 - \omega_1^2\right)a + \left(T_1^0 - T_2^0\right)(-n_1 + j\omega_1)a + a +\right.$$
$$\left.+\left(-T_1^0T_2^0\right)\left(n_1^2 - 2jn_1\omega_1 - \omega_1^2\right)jb + \left(T_1^0 - T_2^0\right)(-n_1 + j\omega_1)jb + jb\right) =$$
$$=\left(-T_1^0T_2^0\left(-2jn_1\omega_1 a\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)\omega_1 a +\right.$$
$$\left.+\left(-T_1^0T_2^0\right)\left(n_1^2 b - \omega_1^2 b\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)b(-n_1 + \omega_1) + b\right)\cos\omega_1\tau +$$
$$+\left(-T_1^0T_2^0\left(n_1^2 - \omega_1^2\right)a - \left(T_1^0 - T_2^0\right)n_1 a + a +\right.$$
$$\left.+\left(-T_1^0T_2^0\right)2n_1\omega_1 b + \left(T_1^0 - T_2^0\right)(-\omega_1 b)\right)\sin\omega_1|\tau| =$$
$$=\left(-T_1^0T_2^0\left((-2in_1\omega_1 a) + \left(n_1^2 b - \omega_1^2 b\right)\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)\left(\omega_1 a + b(-n_1 + \omega_1)\right) + b\right)\cos\omega_1\tau +$$
$$+\left(-T_1^0T_2^0\left(\left(n_1^2 - \omega_1^2\right)a + 2jn_1\omega_1 b\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)(-n_1 a - \omega_1 b) + a\right)\sin\omega_1|\tau| =$$
$$=\left(-T_1^0T_2^0\left(-2jn_1\omega_1\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)\left(n_1^2 - \omega_1^2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(T_1^0 - T_2^0\right)\left(\omega_1\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)(-n_1 + \omega_1)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)\right)\cos\omega_1\tau +$$
$$+\left(-T_1^0T_2^0\left(\left(n_1^2 - \omega_1^2\right)\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) + 2n_1\omega_1 2\omega_1(n_1+n_2)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(T_1^0 - T_2^0\right)\left(-n_1\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) - 2\omega_1^2(n_1+n_2)\right) + \left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right)\right)\sin\omega_1|\tau|.$$

Автокорреляционная функция в этом случае будет иметь вид:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{k_1k_2}{T_{21}^2T_{22}^2}\frac{e^{-n_1|\tau|}}{\omega_1\left[(n_1+n_2)^2 + (\omega_1-\omega_2)^2\right]\left[(n_1+n_2)^2 + (\omega_1+\omega_2)^2\right]}\times$$
$$\times\left[\left(-T_1^0T_2^0\left(-2jn_1\omega_1\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)\left(n_1^2 - \omega_1^2\right)\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(T_1^0 - T_2^0\right)\left(\omega_1\left((n_1+n_2)^2 - \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)(-n_1 + \omega_1)\right) + 2\omega_1(n_1+n_2)\right)\cos\omega_1\tau +$$

$$+\left(-T_1^0T_2^0\left(\left(n_1^2-\omega_1^2\right)\left(\left(n_1+n_2\right)^2-\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\right)-4n_1\omega_1^2\left(n_1+n_2\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(T_1^0-T_2^0\right)\left(-n_1\left(\left(n_1+n_2\right)^2-\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\right)-2\omega_1^2\left(n_1+n_2\right)\right)+\left(\left(n_1+n_2\right)^2-\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\right)\right)\sin\omega_1|\tau|\Big].$$

В общем виде автокорреляционная функция запишется так:

$$R_{xx}(\tau)=c\sum_{n=1}^{d}\sum_{m=1}^{d}\frac{k_nk_m}{T_{2n}^2T_{2m}^2}\frac{e^{-n_n|\tau|}}{\omega_i\left[\left(n_n+n_m\right)^2+\left(\omega_n-\omega_m\right)^2\right]\left[\left(n_n+n_m\right)^2+\left(\omega_n+\omega_m\right)^2\right]}\times$$

$$\times\Big[\left(-T_n^0T_m^0\left(-2n_n\omega_n\left(\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right)+2\omega_n\left(n_n+n_m\right)\left(n_n^2-\omega_n^2\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(T_n^0-T_m^0\right)\left(\omega_n\left(\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right)+2\omega_n\left(n_n+n_m\right)\left(-n_n+\omega_n\right)\right)+2\omega_n\left(n_n+n_m\right)\right)\cos\omega_n\tau+$$

$$+\left(-T_n^0T_m^0\left(\left(n_n^2-\omega_n^2\right)\left(\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right)+4n_n\omega_n^2\left(n_n+n_m\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(T_n^0-T_m^0\right)\left(-n_n\left(\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right)-2\omega_n^2\left(n_n+n_m\right)\right)+\left(\left(n_n+n_m\right)^2-\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\right)\right)\sin\omega_n|\tau|\Big].$$

В частном случае, когда $\omega_n=\omega_m$, корреляционная функция будет иметь вид:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{ck^2}{T_2^4}\frac{e^{-n|\tau|}}{4n\omega\left(n^2+\omega^2\right)}\cdot\Big[\left(-T^{0^2}\omega\left(-2n^2+n^2-\omega^2\right)+\omega\right)\cos\omega\tau+$$

$$+\left(-T^{0^2}\left(2\omega^2+n^2-\omega^2\right)+n\right)\sin\omega|\tau|\Big].=\frac{ck^2}{T_2^2}\frac{e^{-n|\tau|}}{4n}\cdot\left[\left(\frac{T^{0^2}}{T_2^2}+1\right)\cos\omega\tau+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{T^{0^2}}{T_2^2\omega}+\frac{n}{\omega}\right)\sin\omega|\tau|\right],$$

где $\omega^2+n^2=\dfrac{1}{T_2^2}$.

Выводы:

Получена формула для вычисления автокорреляционных функций и среднеквадратичных отклонений выходного параметра электромеханической системы для случая, когда передаточная функция системы представлена в виде суммы колебательных звеньев, умноженных на форсирующее звено, при случайных возмущениях в электрических цепях, в задачах электропривода, а также при исследовании механических систем. При этом соответствующие постоянные времени определяются по характерным точкам и размерам петель АФЧХ системы. Полученные соотношения уменьшают вычислительные трудности для данного случая по сравнению с известными методами.

Список литературы

1. Болотин, В. В. *Случайные колебания упругих систем*. М.: Наука, 1979.
2. Вентцель, Е. С. *Теория вероятностей*. М.: Наука, 1969.
3. Гнеденко, Б. В. *Курс теории вероятностей.* М.: Из-во физ-мат. лит-ры, 1961.
4. Санкин, Ю. Н., Пирожков С. Л. Случайные колебания сложной электромеханической системы при слабом демпфировании // *Вестник УлГТУ*, 2008, № 3, с. 20-28.
5. Свешников, А. А. *Прикладные методы теории случайных функций.* М.: Наука, 1968.