Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 120-125.

Поступила: 31.05.2019
Окончательный вариант: 06.06.2019

УДК 681.5.015

К методу оптимальной дискретной фильтрации линейных динамических систем с мультипликативными помехами

Цыганова Ю. В.[1,*], Куренева Т. Н.[2]

[*]jvt.ulsu@gmail.com
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия
[2] УлГПУ им. И.Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

В работе рассмотрен метод оптимальной дискретной фильтрации линейных динамических систем с мультипликативными помехами. Сформулирован алгоритм дискретной фильтрации и начальные условия для его запуска. Рассмотрен простой пример фильтрации скалярного сигнала. Проведено компьютерное моделирование на языке Matlab.

Ключевые слова: *линейные динамические системы с мультипликативными помехами, оптимальная дискретная фильтрация, компьютерное моделирование*.

Введение

Фильтрация сигналов на фоне помех является одним из главных направлений исследований в современной теории управления и коммуникации, так как имеет множество важных инженерных приложений. Метод оптимальной дискретной фильтрации Калмана [1] с момента открытия в 60-х гг. остается и сейчас одним из самых известных математических инструментов, применяемых для решения практических задач в силу своей рекуррентной структуры, идеально подходящей для реализации на ЭВМ. В настоящее время теория калмановской фильтрации широко развита и применяется для решения задач из разных областей науки [2].

На практике часто возникают задачи оценивания сигнала, искаженного мультипликативными помехами. Причинами возникновения мультипликативных помех являются ошибки моделирования, линеаризации, квантования, явления феддинга и замирания в каналах связи, случайные нарушения в динамике системы или в сенсорах [3, с. 137].

В работе [4] представлен метод оптимальной дискретной фильтрации линейных динамических систем с мультипликативными помехами, основанный на фильтре Калмана. В настоящее время задача фильтрации сигнала, искаженного мультипликативными помехами, остается актуальной, о чем свидетельствует множество недавних работ (см., например, [5–8]).

Целью настоящей работы является исследование указанного метода, формулировка соответствующего алгоритма и его программная реализация на языке Matlab.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную динамическую систему, представленную уравнениями состояния и сенсора

$$\begin{cases} x_t = (\Phi + \Delta\Phi_{t-1})x_{t-1} + \Gamma w_{t-1}, \\ z_t = (H + \Delta H_t)x_t + v_t, \quad t = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta\Phi_t$, ΔH_t – случайные стационарные процессы типа белого шума с нулевым средним значением и ограниченными ковариациями. Предполагаем, что процессы w_t, v_t, $\Delta\Phi_t$, ΔH_t – взаимно не коррелированы. Начальное значение вектора состояния x_0 – гауссовский случайный вектор с нулевым средним и матрицей ковариации P_0.

В [4] представлен оптимальный дискретный фильтр, минимизирующий среднеквадратические значения ошибок оценивания $e_t = x_t - \hat{x}_t$.

***Теорема 1.* [4]** *Оптимальный линейный фильтр для* x_t *по данным измерений* $\{z_j, j \leq t\}$ *определяется уравнением*

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + K_t\left(z_t - H\hat{x}_{t|t-1}\right), \tag{2}$$

где

$$K_t = \Sigma_t H^T R_{\nu,t}^{-1} \tag{3}$$

выбирается так, что оценка $\hat{x}_t$ *удовлетворяет уравнению Винера-Хопфа*

$$E\{e_t z_j^T\} = 0,\ j \leq t,$$

при этом

$$\hat{x}_{t|t-1} = \Phi\hat{x}_t, \tag{4}$$

$$\Sigma_t = E\{[x_t - \hat{x}_{t|t-1}][x_t - \hat{x}_{t|t-1}]^T\} = \Phi[I - K_{t-1}H]\Sigma_{t-1}\Phi^T + Q_t^{\Phi} + \Gamma Q \Gamma^T, \tag{5}$$

$$R_{\nu,t} = E\{\nu_t \nu_t^T\} = H\Sigma_t H^T + R_t^H + R, \tag{6}$$

$$X_t = E\{x_t x_t^T\} = \Phi X_{t-1}\Phi^T + Q_{t-1}^{\Phi} + \Gamma Q \Gamma^T, \tag{7}$$

$$\nu_t = z_t - H\hat{x}_{t|t-1}, \tag{8}$$

$$E\{w_t w_j^T\} = Q\delta_{tj}, \qquad E\{v_t v_j^T\} = R\delta_{tj}, \tag{9}$$

$$E\{\Delta\Phi_t X_t \Delta\Phi_t^T\} = Q_t^{\Phi}, \quad E\{\Delta H_t X_t \Delta H_t^T\} = R_t^H. \tag{10}$$

Перед тем, как записать вычислительный алгоритм оптимальной дискретной фильтрации, сформулируем начальные условия запуска алгоритма.

2. Начальные условия запуска алгоритма

Утверждение 1. *Положим начальную оценку $\hat{x}_{0|-1}$ вектора состояния x_0 дискретной линейной динамической системы (1) равной $\bar{x}_0$. Тогда начальные значения Σ_0 и X_0 для вычисления матриц Σ_t и X_t по уравнениям (5) и (7) задаются в виде:*

$$X_0 = P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T, \tag{11}$$

$$\Sigma_0 = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем (11). Согласно определению матрицы ковариаций, $P_0 = E\{[x_0 - \bar{x}_0][x_0 - \bar{x}_0]^T\} = E\{x_0x_0^T\} - E\{\bar{x}_0x_0^T\} - E\{x_0\bar{x}_0^T\} + E\{x_0\bar{x}_0^T\} = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T$, откуда сразу же следует (11). Теперь докажем (12).

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= E\{[x_0 - \hat{x}_{0|-1}][x_0 - \hat{x}_{0|-1}]^T\} = E\{x_0x_0^T\} - E\{\hat{x}_{0|-1}x_0^T\} - E\{x_0\hat{x}_{0|-1}^T\} + E\{\hat{x}_{0|-1}\hat{x}_{0|-1}^T\} \\ &= X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T - \bar{x}_0\bar{x}_0^T + \bar{x}_0\bar{x}_0^T = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T.\end{aligned}$$

■

3. Алгоритм оптимальной дискретной фильтрации

Запишем вычислительный алгоритм оптимальной фильтрации для дискретной линейной динамической системы с мультипликативными помехами.

Алгоритм 1.

I. Инициализация.
1) Положить $\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$. 2) Найти X_0 согласно (11). 3) Найти Σ_0 согласно (12). 4) Найти $R_{\nu,0}$ согласно (6) и (10). 5) Найти K_0 согласно (3).
II. Вычисления.
Для $t = 1,2,\dots,N$ вычислить:
1) $\hat{x}_{t|t-1}$ согласно (4); 2) Σ_t согласно (5) и (10); 3) X_t согласно (7) и (10); 4) $R_{\nu,t}$ согласно (6) и (10); 5) K_t согласно (3); 6) $\hat{x}_t$ согласно (2).

4. Результаты компьютерного моделирования

Проведем компьютерное моделирование работы алгоритма дискретной фильтрации. Рассмотрим следующий пример системы первого порядка.

Пример 1. [1] Дискретная стохастическая модель скалярного сигнала задана уравнением состояния

$$x_{t+1} = [0.5 + \Delta\Phi_t]x_t + w_t \ .$$

Модель сенсора задана в виде

$$z_{t+1} = [1.0 + \Delta H_t]x_t + v_t \ .$$

Значения ковариаций мультипликативных и аддитивных помех заданы как $E\{\Delta\Phi_t^2\} = E\{\Delta H_t^2\} = 0.01$ и $Q = R = 1.0$. Начальное значение скалярного сигнала $x_0 = \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$, где $\bar{x}_0 = 0.5$ и $P_0 = 1000$.

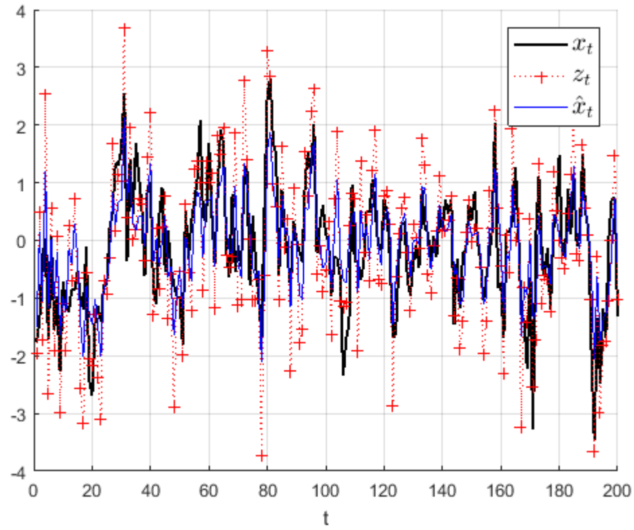

Рис. 1. Результаты компьютерного моделирования дискретной фильтрации скалярного сигнала

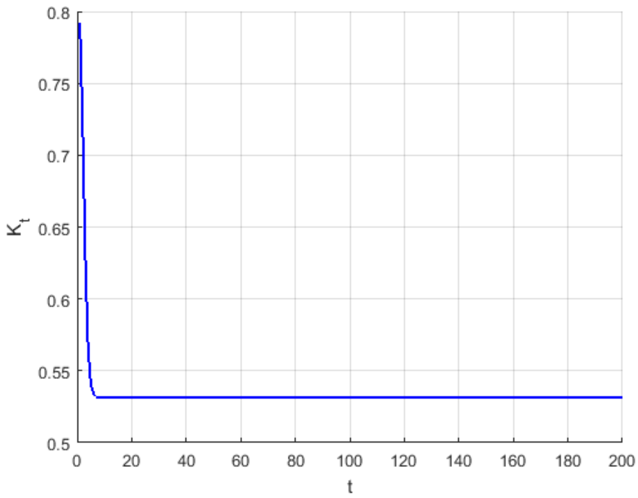

Рис. 2. График сходимости матрицы усиления *K* дискретного фильта к оптимальному значению.

Проведем компьютерное моделирование на языке Matlab. Полученные численные результаты представлены на рисунках 1 и 2. На рис. 1 приведены графики точных значений сигнала x_t, измерений z_t и оценок $\hat{x}_t$. Среднеквадратическая ошибка оценивания RMSE=0.6816 (по данным 200 измерений).

На рис. 2 показан график сходимости коэффициента усиления фильтра K_t к оптимальному значению $K_{opt} = 0.5311$.

Заключение

В работе рассмотрен метод оптимальной дискретной фильтрации линейных динамических систем с мультипликативными помехами. При условии, что статистические характеристики начального вектора состояния системы известны, сформулированы начальные условия для запуска алгоритма дискретной фильтрации. Рассмотрен простой пример фильтрации скалярного сигнала на фоне мультипликативных помех. Проведено компьютерное моделирование на языке Matlab.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку численно эффективных алгоритмов дискретной фильтрации линейных динамических систем с мультипликативными помехами.

Благодарности

Первый автор благодарит за финансовую поддержку Российский Фонд Фундаментальных Исследований и Правительство Ульяновской области (проект № 18-47-730001).

Список литературы

1. Kalman R. A new approach to linear filtering and prediction problems // *ASME Trans.–Part D, J. Basic Engineering*. 1960, v. 82, pp. 34-45.
2. Grewal M.S., Andrews A.P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, 4th Edition. John Wiley & Sons, 2015.
3. *Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография* / И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, М.В. Куликова [и др.]. Ульяновск: УлГУ, 2011.
4. Hampton R.L.T. On unknown state-dependent noise, modeling errors, and adaptive filtering // *Computers & Electrical Engineering*. 1975, v. 2, № 2–3, p. 195-201.
5. Stoica A.-M., Dragan V., Yaesh I. Kalman-type filtering for stochastic systems with state-dependent noise and markovian jumps // *IFAC Proceedings Volumes*. 2009, v. 4, № 10, p. 1375-1380.
6. Chen D., Yu Y., Xu L., Liu X. Kalman filtering for discrete stochastic systems with multiplicative noises and random two-step sensor delays // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2015, Article ID 809734, 11 p.

7. Costa O.L.V., Benites G.R.A.M. Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises // *Automatica*. 2011, v. 47, № 3, p. 466-476.
8. Spinello D., Stilwell D.J. Nonlinear estimation with state-dependent gaussian observation noise // *Technical Report No. VaCAS-2008-02*. Virginia Center for Autonomous Systems Virginia Polytechnic Institute & State University. Blacksburg, VA 24060. March 8, 2010.