Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 20-23.

Поступила: 26.04.2019
Окончательный вариант: 27.05.2019

УДК 519.87 + 004.9 + 573.2

Компьютерное моделирование дискретных многостадийных процессов разрушения и выполнения операций в стохастических продуктивных системах

Бутов А.А.[1], Коваленко А. А.[1,*], Самохвалов М.В.[1]

[*]anako09@mail.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

Рассматривается метод моделирования стохастических продуктивных систем в случайной среде на основе математического описания в мартингальных терминах. Показано, что метод соответствует, как задачам анализа процессов разрушения, так и выполнения операций в стохастических продуктивных системах. Показаны способы построения имитационных компьютерных моделей.

Ключевые слова: *математическое моделирование, имитационное моделирование, алгоритм, стохастическая продуктивная система, выполнение операций, мартингал, процесс размножения и гибели, случайное блуждание, компенсатор, интенсивность.*

Введение

В настоящей работе рассматривается способ математического описания продуктивных систем и процессов выполнения операций. Так в промышленном и сельскохозяйственном производстве наблюдается общность подходов и методов организации продуктивных процессов, сводящая их значительной формализации. Здесь мы основываемся на цикле работ, посвященных анализу физиологических (в широком смысле) процессов, и представленных в [1 - 4]. Также анализируется работа [5], посвященная моделям технологических производственных процессов авиастроительных предприятий.

1. Материалы и методы исследования

Представим следующее формальное математическое описание стохастической модели выполнения операций. На стохастическом базисе $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},P)$ (см. [5 - 8] и литературу в них) определен целочисленный неотрицательный процесс $X=(X_t)_{t\ge0}$, заключающийся в выполнении некоторых операций. Траектории процесса *X* предполагаются регулярными (т.е., непрерывными справа при $t\ge0$ и имеющими предел слева при $t>0$). В качестве процесса выполнения рассмотрим невозрастающий процесс случайного блуждания, [7], в случайной среде $\mathcal{E}=\left\{\left(\lambda_t(1)\right)_{t\ge0},\ldots,\left(\lambda_t(K-1)\right)_{t\ge0};\right.$ $\left.\left(\mu_t(1)\right)_{t\ge0},\ldots,\left(\mu_t(K)\right)_{t\ge0}\right\}$, где положительные случайные функции $\lambda_t(i)$ - $\mathcal{F}_0$-измеримы при $i\ge1$ и $t\ge0$ (см. [6, 8] и литературу в них). Если случайная величина $X_t=X_t(\omega)$ является числом еще не выполненных операций продуктивного процесса, то для *X*, рассматриваемого как модель выполнения *K* операций (при $K>0$), справедливо: $X_t\in\{0,1,\ldots,K\}$ при $t\ge0$, $X_0=K\in\{1,2,\ldots\}$ и $\Delta X_t=X_t-X_{t-}\in\{-1,0,1\}$ при $t>0$. Тогда

$$X_t=K+A_t-B_t,$$

где $A_0=B_0=0$ и точечные считающие процесс $A=(A_t)_{t\ge0}$ и $B=(B_t)_{t\ge0}$ определяются соотношениями

$$A_t=\sum_{0<s\le t} I\{\Delta X_s\le -1\} \text{ и } B_t=\sum_{0<s\le t} I\{\Delta X_s\le -1\},$$

где $I\{\cdot\}$ - индикаторная функция, т.е., $I\{true\}=1$, $I\{false\}=0$. Для субмартингалов $A=(A_t)_{t\ge0}$ и $B=(B_t)_{t\ge0}$ разложение Дуба-Мейера определяет компенсаторы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (см. [5, 7]) со значениями

$$\tilde{A}_t=\int_0^t a_s\cdot I\{1\le X_s\le K-1\}ds \text{ и } \tilde{B}_t=\int_0^t b_s\cdot I\{1\le X_s\}ds \tag{1}$$

с интенсивностями $a_t\ge0$ и $b_t\ge0$, определяемыми случайной средой $\mathcal{E}$:

$$a_t=\sum_{i=1}^{K-1}\lambda_t(i)\cdot I\{X_s=i\} \text{ и } b_t=\sum_{i=1}^{K}\mu_t(i)\cdot I\{X_s=i\}. \tag{2}$$

В случае процессов размножения и гибели,

$$\tilde{A}_t=\int_0^t \alpha_s \cdot X_s \cdot I\{X_s \le K-1\} ds \text{ и } \tilde{B}_t=\int_0^t \beta_s \cdot X_s ds, \tag{3}$$

с $\mathcal{F}_0$-измеримыми случайными функциями α_t и β_t, $t \ge 0$.

2. Результаты и обсуждения

В рассматриваемых случаях имитационное компьютерное моделирование осуществляется на основе инфинитезимальных соотношений для условных вероятностей скачков:

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=1 | \mathcal{F}_t\}= \Delta\tilde{A}_t+o(\Delta\tilde{A}_t), \tag{4}$$

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=-1 | \mathcal{F}_t\}= \Delta\tilde{B}_t+o(\Delta\tilde{B}_t)= b_t \cdot I\{1 \le X_t\} \cdot \Delta = \beta_t \cdot X_t \cdot \Delta. \tag{5}$$

Так, для случайных блужданий в случайной среде из (4) - (5) и (1) - (2) получаем:

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=1 | \mathcal{F}_t\}= a_t \cdot I\{1 \le X_t < K-1\} \cdot \Delta + o(\Delta) =$$
$$\lambda_t(X_t) \cdot I\{1 \le X_t < K-1\} \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{6}$$

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=-1 | \mathcal{F}_t\}= b_t \cdot I\{1 \le X_t\} \cdot \Delta + o(\Delta) =$$
$$\mu_t(X_t) \cdot I\{1 \le X_t\} \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{7}$$

Для случая процесса размножения и гибели в случайной среде из (4) - (5) и (3) следует:

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=1 | \mathcal{F}_t\}= \alpha_t \cdot X_t \cdot I\{X_t < K-1) \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{8}$$

$$P\{X_{t+\Delta}-X_t=-1 | \mathcal{F}_t\}= \beta_t \cdot X_t \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{9}$$

При компьютерном моделировании осуществляется переход к дискретной схеме. В дискретном времени $\{t_0=0, t(1)=\Delta, t(2)=2\cdot\Delta, \ldots, t(i)=i\cdot\Delta, \ldots\}$, соответственно получаем вместо (6) и (7) соотношения (10) – (11):

$$P\{X_{t(i)+\Delta}-X_{t(i)}=1 | \mathcal{F}_{t(i)}\}= \lambda_{t(i)}(X_{t(i)}) \cdot I\{1 \le X_{t(i)} < K-1\} \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{10}$$

$$P\{X_{t(i)+\Delta}-X_{t(i)}=-1 | \mathcal{F}_{t(i)}\}= \mu_{t(i)}(X_{t(i)}) \cdot I\{1 \le X_{t(i)}\} \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{11}$$

Для случая процессов размножения и гибели алгоритм компьютерного моделирования основан на инфинитезимальных соотношениях (12) - (13):

$$P\{X_{t(i)+\Delta}-X_{t(i)}=1 | \mathcal{F}_{t(i)}\}= \alpha_{t(i)} \cdot X_{t(i)} \cdot I\{X_{t(i)} < K-1) \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{12}$$

$$P\{X_{t(i)+\Delta}-X_{t(i)}=-1 | \mathcal{F}_{t(i)}\}= \beta_{t(i)} \cdot X_t \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{13}$$

3. Выводы

Описания дискретных продуктивных систем в мартингальных терминах являются траекторными. Поэтому они позволяют осуществлять простую и наглядную алгоритмизацию для задач имитационного компьютерного моделирования. Описания используют предсказуемые характеристики в терминах компенсаторов, интенсивностей, параметров случайной среды.

Список литературы

1. Бутов А.А., Чибрикова Т.С., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения с восстановлением // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн.* 2018, № 1, с. 34-37.
2. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем // *Фундаментальные исследования.* 2015, № 9-2, с. 219-222.
3. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Обзор математических моделей процессов многостадийного старения // *Естественные и технические науки*. 2015, № 7 (85), с. 84-87.
4. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2018, № 4, с. 14-17.
5. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки.* 2018, Т. 22, №. 3, С. 518-531. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1633.
6. Butov A. A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment // *Theory Probab. Appl.* 1991, vol. 36, no. 3, p. 578-583. DOI: https://doi.org/10.1137/1136067.
7. Butov A. A. Random walks in random environments of a general type // *Stochastics and Stochastics Reports.* 1994, vol. 48, p. 145–160. DOI: https://doi.org/10.1080/17442509408833904.
8. Butov Alexander A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes // *Statistics and Probability Letters.* 2015, vol. 101, p. 49–53. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021.