Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 47-51.

Поступила: 26.04.2019
Окончательный вариант: 01.06.2019

УДК 519.87 + 004.9 + 573.2

Несовместность двух классов математических моделей стохастических продуктивных систем

Коваленко А. А.[1,*]

[*]anako09@mail.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассматриваются модели процессов разрушения двух типов. Разрушение, соответствующее теориям программируемого старения и смерти, рассматривается с функцией распределения моментов разрушения, имеющей конечный носитель. Разрушение с функцией распределения с бесконечным носителем соответствует известному распределению Гомпертца, его аналогам и обобщениям. Сформулирована и доказана теорема о несовместности моделей для процессов выполнения операций в случайной среде в случае невырожденной гладкой плотности. Рассматриваются применения для анализа продуктивных систем.

Ключевые слова*: математическое моделирование, продуктивная система, точно-в-срок, старение, разрушение, мартингал, интенсивность*.

Введение

Рассмотрим модели процессов выполнения некоторых операций в стохастической продуктивной системе. Описание осуществим в мартингальных терминах. Выделим два класса моделей и проанализируем возможность их совместимости.

1. Материалы и методы исследования

Рассмотрим следующее описание стохастической продуктивной системы. Пусть на стохастическом базисе $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ (вероятностном пространстве $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ с неубывающим непрерывным справа потоком σ-алгебр $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, см. [1 - 3] и литературу в них) задан невозрастающий процесс подсчета числа оставшихся к выполнению операций $X=(X_t)_{t\geq 0}$. Этот (продуктивный) процесс заключается в последовательном выполнении некоторого конечного положительного числа операций, очевидно равного начальному значению $X_0 > 0$.

Заметим, что в этой модели, вообще говоря, не предполагается, что процесс X целочисленный или дискретный. Для него допускается существование и непрерывной компоненты, что оказывается удобно при сопоставлении с моделью Гомпертца, где этот процесс играет роль «жизненной силы» (см. [4 - 7] и литературу в них).

На базисе $\mathcal{B}$ определим марковский завершения продуктивного процесса τ:

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t = 0\}.$$

Говорят, что если $P\{\tau < \infty\} = 1$, то процесс выполнения конечен. Тогда при $x \in (-\infty, \infty)$ определена функция распределения $F_\tau(x) = P\{\tau \le x\}$. Заметим, что время выполнения конечного процесса случайно, и из конечности, вообще говоря, его ограниченность не следует.

Назовём конечный процесс выполнения $X = (X_t)_{t \ge 0}$ *точно-в-срок* (или *точно-в-срок* *T*), если для некоторого $T \in (0, \infty)$, выполняется

$$P\{\tau \le T\} = 1 \text{ и } P\{\tau > T - \varepsilon\} > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Тогда, при конечной, известной или заданной константе $T \in (0, \infty)$, будем использовать обозначение $F_\tau^T(x) = P\{\tau \le x \mid T\}$.

Наряду с процессом X определим для каждого конечного процесса $X = X(T) = (X_t(T))_{t \ge 0}$ вспомогательный процесс (одного скачка) $N = (N_t)_{t \ge 0}$ с $N_t = I\{X_t \ge 1\} = I\{t < \tau\}$. В случае гладкой функции распределения $F_\tau(x)$ по теореме Деллашери на стохастическом базисе $\mathcal{B}^N = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \ge 0}, P)$ (с $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s;\, s \le t)$)) для N имеет место разложение Дуба-Мейера:

$$N_t = 1 - \int_0^t N_s \cdot \mu_s ds + m_t^N,$$

с

$$\mu_t = \frac{dF_\tau^T(t)/dt}{(1 - F_\tau^T(t))},$$

и квадратично интегрируемым мартингалом $(m_t^N)_{t \ge 0}$.

2. Результаты и обсуждения

Предположим, что модели, отнесенные к первому классу - это семейство с процессами выполнения операций $X(T)=(X_t(T))_{t\geq 0}$ *точно-в-срок T*, $T<\infty$. Заметим, что тогда, очевидно, следует для первого класса моделей при $T<\infty$:

$$\int_0^t \mu_s ds < \infty \text{ при } t<T, \text{ и } \int_0^T \mu_s ds = \infty. \tag{1}$$

В этом случае при известной конечной $T<\infty$ будем обозначать интенсивность $\mu_t=\mu_t(T)$, и в (1) предполагать $F_\tau(t)=F_\tau^T(t)$.

Второй класс моделей включает в себя процессы с конечным, но не ограниченным выполнением, т.е. $dF_\tau(t)/dt>0$ при всех $t\in[0,\infty)$. Тогда для

$$h_t = {dF_\tau(t)/dt}\Big/{(1-F_\tau(t))},$$

это означает, что, вместо (1) выполняется (2):

$$\int_0^t h_s ds < \infty \text{ при } t<\infty, \text{ и } \int_0^\infty h_s ds = \infty. \tag{2}$$

Первый класс моделей соответствует теориям запрограммированного старения и смертности. Например, к этому классу относят теории генетической предопределенности старения.

Второй класс предполагает сколь угодно большое «долгожительство». Ярким представителем этого класса моделей является схема Гомпертца (как и ее обобщения, например, Гомпертца-Мейкхама и др.). В этих моделях существенная роль отводится процессам износа и накопления повреждений.

Рассмотрим вопрос о возможной совместимости этих теорий и соответствующих классов моделей (см., например, [8 - 11]).

Пусть время *T* – некоторая случайная величина (строго положительная и $\mathcal{F}_0$-измеримая). Вопрос о совместности классов моделей сводится к проблеме существования такого распределения моментов времени *T*, что результирующая модель соответствует выполнению операций с бесконечным носителем $dF_\tau(t)/dt$. Не ограничивая общности мы предполагаем, что распределения моментов времени *T* имеет некоторую гладкую плотность $\rho_T(t)>0$ при $t\geq 0$ (в том числе, и $\rho_T(0)>0$).

Теорема. *Не существует такой гладкой положительной плотности* $\rho_T(t)$, *что*

$$h_t = \int_0^\infty \rho_T(s)\cdot\mu_t(s)ds, \tag{3}$$

и для h_t выполняется условие локальной интегрируемости (2).

Доказательство.

Покажем от противного. Пусть (3) выполняется. Тогда

$$h_t = \int_0^\infty \rho_T(s)\cdot\mu_t(s)ds = \int_0^\infty \rho_T(s)\cdot\mu_t(s)\cdot I\{t<s\}ds. \qquad (4)$$

Из (4) получаем при любой $\delta>0$

$$\int_0^\delta h_t dt = \int_0^\delta\int_0^\infty \rho_T(s)\cdot\mu_t(s)\cdot I\{t<s\}dsdt = \int_0^\infty\int_0^\infty I\{t<\delta\}\cdot\rho_T(s)\cdot\mu_t(s)\cdot I\{t<s\}dsdt.$$

Меняем порядок интегрирования и выбираем такую константу δ, что для некоторой $\varepsilon>0$ выполняется $\rho_T(s)\geq\varepsilon$ при всех $s\in[0,\delta]$. Получаем

$$\int_0^\delta h_t dt = \int_0^\infty \rho_T(s)\cdot\left(\int_0^s I\{t<\delta\}\cdot\mu_t(s)dt\right)ds \geq \int_0^\delta \varepsilon\cdot\left(\int_0^s I\{t<\delta\}\cdot\mu_t(s)dt\right)ds =$$

$$\int_0^\delta \varepsilon\cdot\left(\int_0^s \mu_t(s)dt\right)ds = \infty,$$

что противоречит предположению (2) об интегрируемости h_t на любых конечных интервалах. Теорема доказана.

■

3. Выводы

При моделировании конечных продуктивных процессов предполагается рассмотрение одного из двух непересекающихся классов: с конечными носителями распределения и с бесконечными. Так, например, модели сельскохозяйственного циклического сезонного производства (в том числе зерноводства) не совместимы с методами моделирования потенциально долгоживущих объектов, например, в лесоводстве.

Также несовместны геронтологические модели с программируемой смертью и модели класса обобщений схем Гомпертца.

Список литературы

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2018, Т.22, №. 3, с. 518-531.
   DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1633.

2. Butov A. A. Random walks in random environments of a general type // *Stochastics and Stochastics Reports.* 1994, vol. 48, p. 145-160.
DOI: https://doi.org/10.1080/17442509408833904.
3. Butov Alexander A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes // *Statistics and Probability Letters.* 2015, vol. 101, p. 49-53.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021.
4. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем // *Фундаментальные исследования.* 2015, № 9-2, с. 219-222.
5. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Обзор математических моделей процессов многостадийного старения // *Естественные и технические науки*. 2015, № 7 (85), с. 84-87.
6. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2018, № 4, с. 14-17.
7. Бутов А.А., Чибрикова Т.С., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения с восстановлением // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн*. 2018. № 1, с. 34-37.
8. Weinert B. T., Timiras P. S. Invited review: Theories of aging // *Journal of applied physiology*. 2003, vol. 95, №. 4, p. 1706-1716.
DOI: https://doi.org/10.1152/japplphysiol.00288.2003.
9. Mitteldorf J. Programmed and non-programmed theories of aging // *Russian Journal of General Chemistry.* 2010, т. 80, №. 7, с. 1465-1475.
10. Blagosklonny MV. Aging is not programmed: genetic pseudo-program is a shadow of developmental growth // *Cell Cycle.* 2013, vol. 12, no. 24, p. 3736-3742.
DOI: https://doi.org/10.4161/cc.27188.
11. Kowald A., Kirkwood T. B. L. Can aging be programmed? A critical literature review // *Aging Cell.* 2016, vol. 15, no. 6, p. 986-998.
DOI: https://doi.org/10.1111/acel.12510.