



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 52–64.

Поступила: 01.03.2019

Окончательный вариант: 03.06.2019

© УлГУ

УДК 519.6

Прогнозирование решений на основе математической модели когнитивных цифровых автоматов

Кожевников В.В.^{1*}, Леонтьев М.Ю.^{1,2},
Приходько В.В.¹, Сергеев В.А.²,
Языкова Е.С.¹

* vvk28061955@mail.ru

¹УлГУ, Ульяновск, Россия

²УФИРЭ РАН, Ульяновск, Россия

Предлагается подход к решению проблемы прогнозирования решений на основе математической модели когнитивных цифровых автоматов (КЦА). Особое преимущество предлагаемой математической модели КЦА заключается в том, что процедура обучения может выполняться на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов. Прогнозирование, или генерация решений, в свою очередь, выполняется на основе, полученной в процессе обучения математической модели КЦА. Математическая модель КЦА апробирована на примере моделирования n -разрядного параллельного сумматора. В результате обучения на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов была сформирована математическая модель n -разрядного параллельного сумматора, которая позволила с заданной точностью воспроизводить все множество наборов таблицы истинности n -разрядного параллельного сумматора.

Ключевые слова: когнитивный цифровой автомат, прогнозирование, сети Петри, уравнение состояний, математическое моделирование, синтез, генерация, анализ, логика.

Введение

В работе рассматривается возможность решения проблемы прогнозирования решений на основе математической модели когнитивных цифровых автоматов (КЦА) [1]. Особенность математической модели КЦА заключается в том, что процедура обучения может выполняться на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов.

Формирование конфигурации исходной структуры автомата осуществляется в результате кластерного анализа множества обучающих наборов. На основе результатов кластерного анализа или классификации множества обучающих наборов можно определить количество входов и выходов исходной структуры, количество слоев и количество компонентов в каждом слое, структуру связей между компонентами. Регрессионный анализ данных обучающих наборов выполняется в процессе обучения или синтеза логики исходной структуры автомата.

Исходная структура автомата представляется в виде универсальной матрицы, где связи между компонентами построены по принципу «все со всеми». Возможны также различные многоуровневые конфигурации исходной структуры, где связи между компонентами построены по принципу «все со всеми» только между различными уровнями исходной структуры или по принципу сверточных нейронных сетей.

Возможность формирования формулы (сетового алгоритма) КЦА зависит от критической массы (качества) обучающих наборов и алгоритмов обучения. Отсюда особое значение приобретает задача генерации минимального множества обучающих наборов для заданной или экспериментально определяемой функции КЦА. Прогнозирование, или генерация решений, в свою очередь, выполняется на основе, полученной в процессе обучения математической модели КЦА, и сводится к генерации решений, не предусмотренных в процессе обучения.

Математическая модель строится на базе представления КЦА в виде уравнения состояний сетей Петри (СП) из класса уравнений Мурата (матричных уравнений) [2] или системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Математическая модель КЦА апробирована на примере моделирования n -разрядного параллельного сумматора. В результате обучения на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов была сформирована математическая модель n -разрядного параллельного сумматора, которая позволила с заданной точностью воспроизводить все множество наборов таблицы истинности n -разрядного параллельного сумматора.

1. Построение математической модели n -разрядного параллельного сумматора

Исходная структурная схема n -разрядного параллельного сумматора представляется в виде маркированного графа (рис. 1) путем интерпретации входов и выходов схемы и структурных компонентов позициями маркированного графа, а самих компонентов и линий соединений составными и простыми переходами соответственно. Множество входов и выходов структурной схемы интерпретируется как множество входных и выходных позиций сети. Наличие информации интерпретируется как фишка в позиции сети. На логическом уровне представления фишка в позиции сети интерпретируется как логическая единица, а ее отсутствие – как логический ноль. Перемещение информации интерпретируется как движение фишек в сети.

На рис. 1 приведен маркированный граф двухразрядного сумматора. Формирование структурной схемы выполнено на основе результатов кластерного анализа (классификации) множества обучающих наборов или таблицы истинности двухразрядного сумматора (см. табл.). В первой строке таблицы приведены условные обозначения входов и выходов двухразрядного сумматора. Во второй строке – их обозначения на графе.

Таблица

| № | a_2 | b_2 | a_1 | b_1 | f_2 | f_1 | c_2 |
|----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|
| | P_4 | P_3 | P_2 | P_1 | P_{20} | P_{19} | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

В качестве минимального множества обучающих наборов (выделены серым цветом) отобраны те наборы из таблицы истинности, которые дают единицу только в одном выходном разряде сумматора с учетом переноса в старший (третий) разряд. Таким образом, для каждого выходного разряда сумматора сформирован соответствующий класс обучающих наборов. Далее для каждого класса обучающих наборов отобраны наборы с одной единицей на входах сумматора, с двумя единицами и т. д. По данному принципу сформированы соответствующие подклассы обучающих наборов.

При формировании исходной структуры сумматора множество подклассов составляет первый слой структурной схемы, где для каждого подкласса отводится один компонент. Множество классов составляет второй слой структурной схемы, где для каждого класса также отводится один компонент. В результате исходная структура сумматора состоит из двух слоев. Количество компонентов первого слоя равно количеству подклассов. Количество компонентов второго слоя равно количеству классов. В случае, когда класс состоит из одного подкласса, формируется только один компонент в первом или во втором слое. Структура связей между входами структурной схемы и входами компонентов первого слоя, выходами компонентов первого слоя и входами компонентов второго слоя сформирована по принципу «все со всеми».

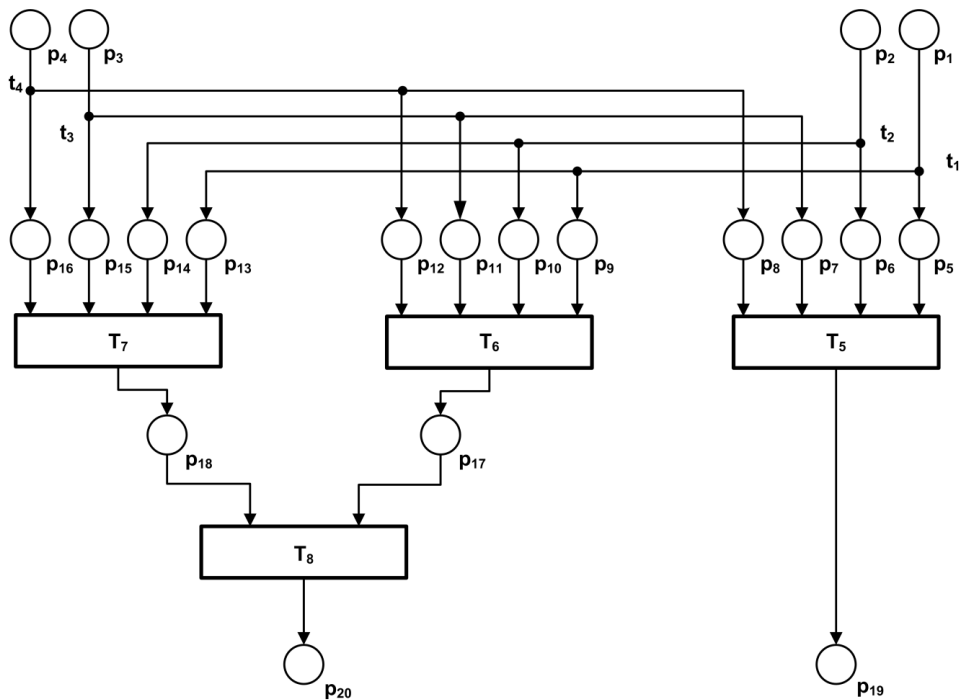


Рис. 1. Маркированный граф двухразрядного сумматора

Графическая форма представления структурной схемы позволяет перейти от описания структурной схемы к ее математическому представлению в виде матрицы инцидентности: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$. Матрица инцидентности для двухразрядного сумматора приведена в приложении (П1) (здесь и далее приведены ссылки на формулы, вынесенные в Приложение).

Построение комплексной математической модели n -разрядного параллельного сумматора выполняется на базе фундаментального уравнения состояний СП из класса уравнений Мурата [2]:

$$\Delta \mu = \mathbf{A} \cdot \tau \quad (1)$$

где $\Delta \mu = \mu - \mu_0$, μ_0 – вектор начальной разметки сети, μ – вектор конечной разметки сети, τ – вектор покрытия переходов сети, который определяет только состав и не определяет последовательность срабатываний переходов. Вектор $\Delta \mu$ задается на множестве позиций сети \mathbf{P} . Вектор τ задается на множестве переходов сети \mathbf{T} . Множество векторов $\Delta \mu$ образует множество $\Delta \mathbf{M}$, где $\Delta \mu \in \Delta \mathbf{M}$. Множество векторов покрытия переходов τ образует покрытие сети \mathbf{S} , где $\tau \in \mathbf{S}$.

Множество $\Delta \mathbf{M}$, заданное на множестве входных и выходных позиций сети, интерпретируется как исходная таблица истинности (см. табл.) или таблица переходов (переключений) состояний n -разрядного параллельного сумматора. В качестве множества обучающих наборов могут использоваться все наборы из таблицы истинности либо только минимальное множество наборов.

На множестве обучающих наборов сетевая модель n -разрядного параллельного сумматора может быть представлена в виде системы матричных уравнений состояний СП (1):

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \quad (2)$$

Для двухразрядного сумматора, приведенного на рис.1, на минимальном множестве обучающих наборов система матричных уравнений (2) может быть приведена к виду (П2).

Разметка внутренних позиций множества ΔM не определена. Состав переходов покрытия S также определен только на множестве составных переходов. Полностью определена только исходная матрица инцидентности A .

2. Синтез логики n-разрядного параллельного сумматора

Для решения задачи синтеза логики n-разрядного параллельного сумматора (обучения) используются методы исчисления инвариантов системы уравнений маркированного графа структурной схемы (2). Инварианты маркированного графа являются мощным инструментом исследования структурных свойств сетей и представляют собой решения однородных систем уравнений. В результате исчисления инвариантов система матричных уравнений для двухразрядного сумматора примет вид (П3) при условии (П4).

Проекция неявно определенной входной логики составных переходов компонентов и выходной логики простых переходов линий соединений на исходную структурную схему сводится к решению системы однородных уравнений с неопределенной матрицей инцидентности. После введения неизвестных в матрицу инцидентности система матричных уравнений для двухразрядного сумматора может быть представлена как однородная на множестве внутренних позиций сети (см. (П5)).

Для каждого вектора τ вычисляется соответствующая матрица A^τ . Значения неизвестных для ингибиторных дуг определяются неявно и равны нулю, что обеспечивает решение проблемы матричного представления ингибиторных СП. При этом для каждого составного перехода, входящего в состав вектора τ , определяются соответствующий простой переход и его структурные связи, характерные только для данного вектора τ . В результате объединения матриц A^τ формируется ингибиторная матрица инцидентности: $A^I = \cup A^\tau$.

Практически проекция неявно определенной логики на исходную структурную схему автомата сводится к обнулению строк исходной матрицы инцидентности для каждого вектора τ на множестве позиций сети, не инвариантных вектору τ , с последующим объединением матриц для каждого τ . Нулевые строки в матрице инцидентности A^I удаляются.

Для двухразрядного сумматора матрица инцидентности A^I примет вид (П6). Матрица A^I , в свою очередь, может быть представлена в виде ингибиторного графа СП (рис. 2).

Для формирования формулы (сетевого алгоритма) исходной функции, заданной на множестве обучающих наборов, могут быть использованы операции реляционной алгебры и более сложные реляционные исчисления над матрицами A^τ . В конечном итоге множество полученных матриц A^τ составляют объединенную матрицу неоднородной ингибиторной СП или сетевой алгоритм (модель логической схемы).

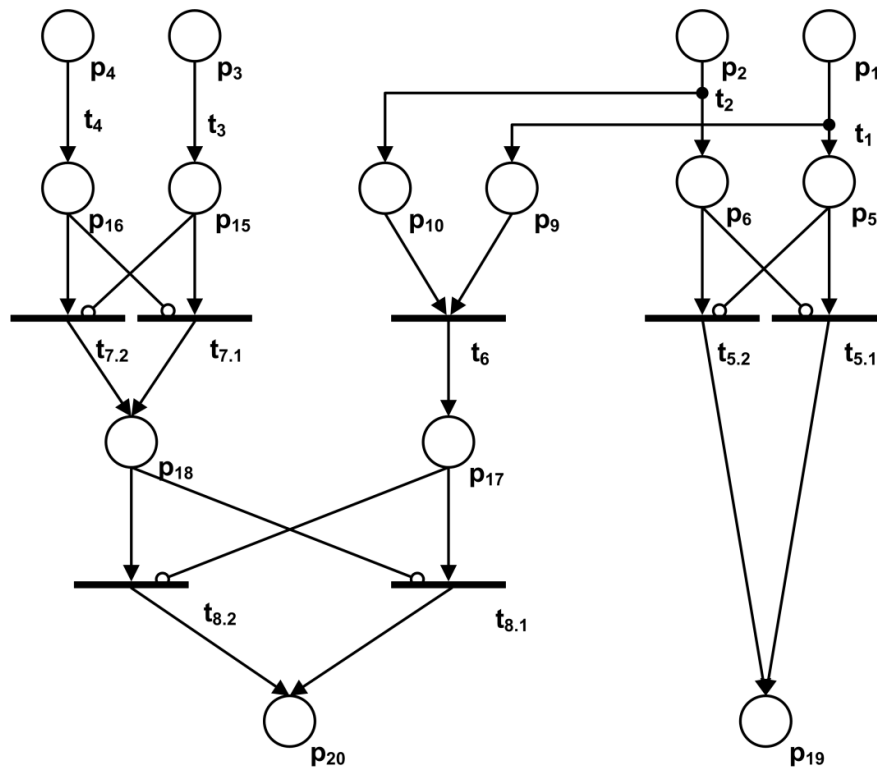


Рис. 2. Ингибиторный граф двухразрядного сумматора

В дальнейшем полученный сетевой алгоритм в виде матрицы инцидентности A^I используется в качестве исходной информации для решения задач анализа достижимости и генерации достижимых устойчивых состояний n -разрядного параллельного сумматора.

3. Генерация решений n -разрядного параллельного сумматора

Математическая модель n -разрядного параллельного сумматора позволяет воспроизвести как заданное в процессе обучения множество решений, так и множество решений, которые не были заданы в процессе обучения. Задача генерации решений математической модели n -разрядного параллельного сумматора сводится к решению задачи достижимости ингибиторных СП.

Анализ достижимости ингибиторных СП, в свою очередь, сводится к решению системы уравнений с ингибиторной матрицей инцидентности A^I :

$$\Delta M = A^I \cdot S. \quad (3)$$

В случае, если вектор $\Delta \mu$ полностью определен на множестве входных и выходных позиций сети, выполняется анализ достижимости устойчивых состояний автомата (верификация структурной схемы автомата). Система уравнений (3) может иметь только одно решение для каждого вектора $\Delta \mu$.

Генерация достижимых устойчивых состояний n -разрядного параллельного сумматора выполняется в случае, если вектор $\Delta \mu$ полностью не определен на множестве входных и выходных позиций сети. В случае неопределенности или неполного определения вектора $\Delta \mu$ система уравнений (3) имеет множество решений. Множество решений системы урав-

нений (3), в свою очередь, ограничено и зависит от степени определенности вектора $\Delta\mu$. Доопределение вектора $\Delta\mu$ для каждого полученного вектора τ выполняется путем простого умножения вектора τ на матрицу инцидентности A^I . Все множество решений может быть получено даже в случае полной неопределенности вектора $\Delta\mu$. Количество решений соответствует количеству наборов таблицы истинности (таблицы переключений).

Проблема заключается в том, что известные методы генерации решений линейных систем уравнений в целых неотрицательных числах имеют асимптотически экспоненциальную вычислительную сложность, что затрудняет их применение для анализа реальных систем. Критическим с точки зрения эффективности является время генерации (построения) минимального порождающего множества решений (МПМР) на множестве невыраженных переменных.

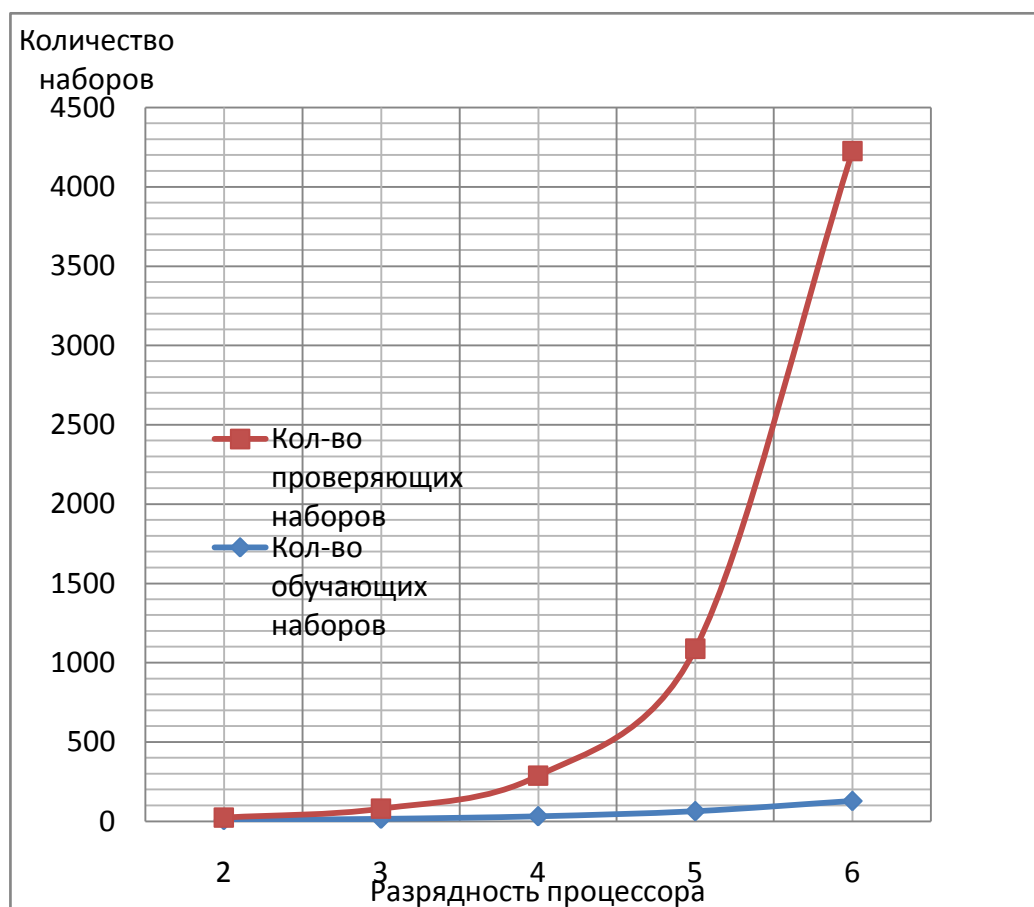


Рис. 3. Графики роста общего количества наборов и минимального количества обучающих наборов в зависимости от роста разрядности сумматора

Генерация МПМР уравнения состояний КЦА выполняется исходя из принципа активности компонентов (составных переходов сетевой модели) для каждого состояния автомата. В составе сетевой модели каждого компонента одновременно может быть активизирован только один простой переход (набор из таблицы истинности компонента). Соответственно количество единиц в комбинации равно количеству активных переходов компонентов

схемы. Практически множество решений, полученных в процессе обучения для минимального множества обучающих наборов, может быть использовано в качестве МПМР.

Все множество возможных решений для двухразрядного сумматора приведено в (П7) и (П8). С ростом разрядности сумматора при экспоненциальном росте общего количества наборов достигается практически линейная зависимость роста обучающих наборов (рис.3). Соответственно, достигается приемлемое время обучения. При этом разрядность сумматора ограничена только емкостью памяти и быстродействием компьютера.

Заключение

Для решения задач построения математической модели КЦА, синтеза логики (обучения) и генерации решений могут быть использованы стандартные методы и средства решения матричных уравнений или СЛАУ. Моделирование n-разрядного параллельного сумматора выполнено в среде Tensor Flow. Tensor Flow представляет вычисления в виде графов потоков данных, отслеживающих свое состояние (stateful dataflow graph), и позволяет перенести выполнение ресурсоемких вычислительных задач из среды с одним CPU (Central Processing Unit) в гетерогенную быструю среду с несколькими GPU (Graphics Processing Unit). Перспективной представляется возможность моделирования на базе TPU (Tensor Processing Unit). Принимая во внимание возможности математической модели КЦА, Tensor Flow призвана обеспечить массовый параллелизм и высокую масштабируемость машинного обучения и генерации решений. Не исключается также возможность реализации математической модели на базе FPGA (Field-Programmable Gate Array).

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научного проекта № 18-47-732015 р_мк.

Список литературы

1. Кожевников В.В. Концепция математического моделирования когнитивных цифровых автоматов // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2015, вып. 1 (7), с. 48-53.
2. Мурата Т. Сети Петри. Свойства, анализ, приложения // *ТИИЭР*. 1989, № 44, с. 41-85.

$$\begin{array}{c}
\Delta\mu_2 \Delta\mu_3 \Delta\mu_4 \Delta\mu_5 \Delta\mu_9 \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & x & x & x & x \\
x & 0 & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & 0 & x & x \\
x & x & 0 & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & 0 & x \\
x & x & x & x & 0 \\
x & x & 0 & x & x \\
x & x & x & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ T_5 \ T_6 \ T_7 \ T_8 \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5 \ \tau_9 \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad (\text{П3})
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix} \cdot \begin{matrix}
\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_9 \\
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
p_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix} & =
\end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

(П4)

$$\begin{matrix}
\Delta\mu_2 & \Delta\mu_3 & \Delta\mu_4 & \Delta\mu_5 & \Delta\mu_9 \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
& = &
\begin{matrix}
t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \\
p_1 & \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_4 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_5 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_7 & 0 & 0 & -\alpha_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_8 & 0 & -\alpha_8 & 0 & 0 \\
\alpha_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_9 & 0 \\
0 & \alpha_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{10} & 0 \\
0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 & -\alpha_{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 & -\alpha_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} & -\alpha_{14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
& \cdot &
\begin{matrix}
\tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_9 \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
& &
\end{matrix}
\end{matrix} \quad (\text{П5})$$

$$\begin{matrix}
& & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_{5.1} & t_{5.2} & t_6 & t_{7.1} & t_{7.2} & t_{8.1} & t_{8.2} \\
A^I = & \begin{matrix}
p_1 & \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
& &
\end{matrix}
\end{matrix} \quad (\text{П6})$$

$$\mathbf{S} = \begin{matrix} & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 & \tau_7 & \tau_8 & \tau_9 & \tau_{10} & \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & \tau_{15} & \tau_{16} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_{5.1} \\ t_{5.2} \\ t_6 \\ t_{7.1} \\ t_{7.2} \\ t_{8.1} \\ t_{8.2} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (\text{II7})$$

$$\Delta \mathbf{M} = \begin{matrix} & \Delta\mu_1 & \Delta\mu_2 & \Delta\mu_3 & \Delta\mu_4 & \Delta\mu_5 & \Delta\mu_6 & \Delta\mu_7 & \Delta\mu_8 & \Delta\mu_9 & \Delta\mu_{10} & \Delta\mu_{11} & \Delta\mu_{12} & \Delta\mu_{13} & \Delta\mu_{14} & \Delta\mu_{15} & \Delta\mu_{16} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{15} \\ p_{16} \\ p_{17} \\ p_{18} \\ p_{19} \\ p_{20} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (\text{II8})$$