Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 1, с. 65-69.

Поступила: 31.05.2019
Окончательный вариант: 06.06.2019

© УлГУ

УДК 681.5.075

Анализ дискретной линейной стохастической модели конвективно-диффузионного переноса

Кувшинова А. Н. [1,*]

[*]KUVANulspu@yandex.ru
[1]УлГПУ им. И.Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

Работа посвящена анализу наблюдаемости и управляемости математической модели конвективно-диффузионного переноса, построенной в виде дискретной линейной стохастической системы в пространстве состояний. Модель построена на основе конечно-разностной схемы из пяти узлов. В работе решена задача выбора минимального количества сенсоров, при котором модель сохраняет свойство полной наблюдаемости и управляемости. Решение основано на проверке критерия полной наблюдаемости и управляемости дискретной линейной инвариантной во времени системы. Показано, что для сохранения свойства полной наблюдаемости дискретной модели достаточно двух сенсоров.

Ключевые слова: *дискретная линейная стохастическая система; модель конвективно-диффузионного переноса; наблюдаемость линейной динамической системы; матрица наблюдаемости; управляемость линейной динамической системы; матрица управляемости.*

Введение

Модели конвективно-диффузионного переноса достаточно часто используются при описании различных природных явлений и антропогенных процессов [1; 2]. *Диффузией* называется перемещение частиц (молекулы, иона, атома) в направлении убывания их концентрации, обусловленное тепловым движением. Диффузия возможна в газах, жидкостях, а также в твердых телах. *Конвекция* – это перенос массы, теплоты и других физических величин в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества.

В одномерном случае модель конвективно-диффузионного переноса может быть описана уравнением (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{dx} = \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x},\ a < x < b,\ 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$c(x,0) = \varphi(x),\ \ a \le x \le b, \tag{2}$$

$$c(a,t) = f_1(t),\ c(b,t) = f_2(t),\ 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

где $c(x, t)$ – искомая функция, x – пространственная координата, t – время, v – скорость конвекции, α – коэффициент диффузии, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi(x)$ – заданные функции, a и b – границы рассматриваемого отрезка.

Используя конечно-разностную схему [3], запишем систему, в которой вектор c_{k+1} состоит из пяти внутренних узлов пространственной сетки (k=0,1,…):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} c_{k+1}^1 \\ c_{k+1}^2 \\ c_{k+1}^3 \\ c_{k+1}^4 \\ c_{k+1}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ c_k^3 \\ c_k^4 \\ c_k^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,k} \\ f_{2,k} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} z_{k+1}^1 \\ z_{k+1}^2 \\ z_{k+1}^3 \\ z_{k+1}^4 \\ cz_{k+1}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k+1}^1 \\ c_{k+1}^2 \\ c_{k+1}^3 \\ c_{k+1}^4 \\ c_{k+1}^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{k+1}^1 \\ \xi_{k+1}^2 \\ \xi_{k+1}^3 \\ \xi_{k+1}^4 \\ \xi_{k+1}^5 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) в общем случае имеет представление в виде разностных уравнений в пространстве состояний:

$$\begin{cases} c_{k+1} = Fc_k + Bu_{k+1} \\ z_{k+1} = Hc_{k+1} + \xi_{k+1} \end{cases}, \tag{5}$$

где F – матрица перехода, H – матрица наблюдений, B – матрица входных воздействий, $c_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ – вектор входных воздействий, моделирующий граничные условия (3), $z_k \in \mathbb{R}^m$ – вектор измерений, $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ – погрешность измерений, является нормально распределенной последовательностью с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R>0.

Целью работы является анализ наблюдаемости и управляемости дискретной линейной стохастической модели (4).

1. Наблюдаемость дискретной линейной модели

Сначала проанализируем свойство наблюдаемости. Линейная система, либо пара (F, H), *наблюдаема* на отрезке [t_0, t_1] [4], если для любого $t_k \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ состояние $x(t_0)$ однозначно определяется через измеряемые компоненты вектора состояния и известные входные воздействия на отрезке [t_0, t_k]. Для того, чтобы дискретная линейная инвариантная во времени система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости M_{DTI} был равен n, т. е. числу строк в матрице F [3]. Учитывая, что в нашем случае матрица H является единичной, запишем выражение для вычисления матрицы наблюдаемости M_{DTI}:

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \\ HF^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ F \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Очевидно, что ранг матрицы (6) больше либо равен 5. Таким образом, модель (4) является полностью наблюдаемой.

Найдем минимальное число сенсоров, при котором рассматриваемая дискретная модель конвективно-диффузионного переноса сохраняет свойство полной наблюдаемости. Рассмотрим все возможные варианты схемы измерений, представленные ниже:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого варианта построим матрицу наблюдаемости M_{DTI}и найдем ее ранг. Вычисления проведем в системе Maple. По результатам вычислений модель (4) будет полностью наблюдаемой при минимальном количестве измерений, представленных матрицей H_1 и при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 модели (4) не равны нулю.

Заметим, что при неизвестных входных воздействиях и при $H = H_1$ выполняется условие $rank\ H_k B_{k-1} = rank\ B_{k-1} = 2$ алгоритма дискретной фильтрации [6], примененного в [3] для динамической идентификации граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса.

2. Управляемость дискретной линейной модели

Проверим свойство управляемости модели (4). Система является *управляемой* [4], если для начального момента времени t_0 и начального условия $x(t_0)=x_0$ найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$ и момент времени $t_1>t_0$, что единственное решение $x(t)$ пройдет через заданную точку $x(t_1)=x_1$. Для того, чтобы дискретная линейная инвариантная во времени система была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости W_{DTI} был равен n, т. е. числу строк в матрице F [3]. Запишем выражение для вычисления матрицы управляемости:

$$W_{DTI} = [B|FB|FB^2|FB^3|FB^4]. \qquad (7)$$

Найдем:

$$FB = \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3^2 \\ 0 & a_1a_3 \end{bmatrix}, FB^2 = \begin{bmatrix} a_1(a_1a_3 + a_2^2) & 0 \\ 2a_1^2a_2 & 0 \\ a_1^3 & 0 \\ 0 & 2a_2a_3^3 \\ 0 & a_3(a_1a_3 + a_2^2) \end{bmatrix},$$

$$FB^3 = \begin{bmatrix} a_1(3a_1a_2a_3 + a_2^2) & 0 \\ a_1^2(2a_3 + 3a_2^2) & a_3^4 \\ 3a_1^3a_2 & 3a_2a_3^3 \\ a_1^4 & a_3^2(2a_1 + 3a_2^2) \\ 0 & a_3(3a_1a_2a_3 + a_2^3) \end{bmatrix},$$

$$FB^4 = \begin{bmatrix} a_1(2a_1^3a_3^2 + 6a_1a_2a_3 + a_2^4) & a_3^5 \\ 4a_1^2a_2(a_1a_3 + a_2^2) & 4a_2a_3^4 \\ 3a_1^3(a_1a_3 + 2a_2^2) & 3a_3^3(a_1a_3 + a_2^2) \\ 4a_1^4a_2 & 4a_2a_3^2(2a_1a_3 + a_2^2) \\ a_1^5 & a_3(22a_3^2 + 6a_1a_2^2a_3 + a_2^4) \end{bmatrix}.$$

Подставим полученные выражения в (7). Приводя матрицу W_{DTI} к ступенчатому виду, получим $rank\, W_{DTI} = 5$ при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 не равны нулю. В этом случае модель системы является полностью управляемой.

3. Заключение

В данной работе проведен анализ свойств наблюдаемости и управляемости математической модели конвективно-диффузионного переноса, построенной в виде дискретной линейной динамической системы пятого порядка, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний. Модель построена на основе конечно-разностной схемы, состоящей из пяти узлов. Неизвестные граничные условия заданы как управляющие воздействия.

В работе решена задача выбора минимального количества сенсоров, при котором модель сохраняет свойство полной наблюдаемости. Решение задачи основано на проверке критерия полной наблюдаемости дискретной линейной инвариантной во времени системы. В результате показано, что для сохранения свойства полной наблюдаемости дискретной модели достаточно двух сенсоров, которые измеряют значения в крайних внутренних точках пространственной сетки, при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 не равны нулю.

Также проведен анализ свойства управляемости. Показано, что если коэффициенты a_1 и a_3 не равны нулю, то модель (4) является полностью управляемой.

Предметом дальнейших исследований является обобщение полученных результатов на модель n-го порядка.

Список литературы

1. Леонтьева А.И. *Теория тепломассообмена: учеб. для машиностроит. спец. техн. ун-тов и вузов*. М.: МГТУ, 1997.
2. Фарлоу С. *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров*. М.: Мир, 1985.
3. Цыганов А.В., Цыганова Ю.В., Кувшинова А.Н. Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Сборник трудов V международной конференции и молодежной школы «Информационные технологиии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019)*, Самара, Россия, 21–24 мая 2019. т. 3. Самара: Новая техника, 2019. С. 169–177.
4. Maybeck P.S. *Stochastic models, estimation, and control.* Volume 1. New York: Academic Press, 1979.
5. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. *Детерминистские модели динамических систем.* Методическое пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2007.
6. Gillijns S., Moor B.D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*. 2007, v. 43, p. 111–116.