Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 2, с. 8-13.

Поступила: 16.11.2019
Окончательный вариант: 25.11.2019

УДК 51-72

Устойчивость положения механической системы с вязкоупругими элементами

Андреев А.С., Левщанова Е.В. *

*avisfy@mail.ru
УлГУ, Ульяновск, Россия

Настоящая работа посвящена исследованию динамики наследственных механических систем. Исследуется устойчивость положения равновесия механической системы с вязкоупругими элементами.

Ключевые слова: *Лагранжева система; устойчивость; модель с вязкоупругими элементами.*

Введение

Механика наследственных сред, начало которой положили работы Вольтерра [1], получила широкое развитие в связи с использованием в конструкторской практике новых конструкционных материалов, обладающих ярко выраженными реологическими свойствами [2, 3]. В настоящее время основы механики наследственной среды широко используется в практике инженерных расчетов. Для исследования динамики многомассовых (дискретных) наследственных систем развиваются различные конструктивные методы, например с использованием прямых методов математической физики типа Галеркина для редукции систем с бесконечным числом степеней свободы, переходу от сложной среды к дискретным моделям.

1. Устойчивость положения Лагранжевой наследственной системы

Рассмотрим дискретную наследственную механическую систему с голономными связями, задаваемую обобщенно координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$ и описываемую уравнениями Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - c_j \int_0^t R_j(t-\tau) q_j(\tau) d\tau + c_j q_j = Q_j \quad (j = 1,2,\dots,n) \tag{1.1}$$

где $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n)\dot{q}_j\dot{q}_j$, $Q_j = Q_j(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$, $P_j(q_j) = -c_j q_j + \int_0^t R_j(t-\tau)q_j(\tau)d\tau$, соответственно кинетическая энергия, обобщенные силы, реакции наследственных элементов с ядрами релаксации

$R_j(s) \geq 0, \frac{dR_j(s)}{ds} \leq 0, \int_0^{\infty} R_j(s)ds < +\infty$.

Предположим, что обобщенные силы $Q_j = Q_j(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ представляет собой совокупность потенциальных сил с потенциальной энергией

$\Pi = \Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$ и диссипативных сил $Q_j^{(1)} = Q_j^{(1)}(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$,

$\sum_{j=1}^{n} Q_j^{(1)}(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)\, \dot{q}_j \leq 0$

Допустим, что

$$\frac{\partial\Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_j} = 0$$

при $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$

Тогда система имеет положение равновесия $\dot{q}_1 = \dots, = \dot{q}_n = 0$, $q_1 = \dots = q_n = 0$.

Уравнения, предельные к уравнениям (1.1) будут иметь вид [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - c_j\int_{-\infty}^{t} R_j(t-\tau)q_j(\tau)d\tau + c_j q_j =$$

$$= \frac{\partial\Pi^*(t, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_j} + Q_j^*(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \qquad (1.2)$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$V = \Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) + \Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_n) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j q_j^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^t R_j(\tau)d\tau\right)q_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t R_j(\tau)\big(q_j(t) - q_j(t-\tau)\big)^2 d\tau \qquad (1.3)$$

Для производной этого функционала в силу уравнений (1.2) находим

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{(1)}(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)\,\dot{q}_j + \frac{\partial\Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} R_j(t)\, q_j^2 +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{dR_j(\tau)}{d\tau}\big(q_j(t-\tau) - q_j(\tau)\big)^2 d\tau \qquad (1.4)$$

На основании работы [4] имеем следующие результаты об устойчивости положения равновесия системы (1.1).

Результат 1

Предположим, что:

1) Реологические ядра $R_j(t)$ удовлетворяют условию

$$R_j(t) \geq 0, \quad \frac{dR_j(t)}{dt} \leq 0 \qquad (1.5)$$

2) Зависимость

$$\Pi_0(t, q_1, q_2, \dots, q_n) = \Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_n) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j q_j^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^t R_j(\tau)d\tau\right)q_j^2 \qquad (1.6)$$

ограничена снизу и не возрастает по t, $\Pi_0(t, q_1, q_2, \dots, q_n) \geq m = const$

$$\frac{\partial\Pi_0(t, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial t} \leq 0 \qquad (1.7)$$

Тогда каждое ограниченное движение системы (1.1) неограниченно приближается к множеству $\left\{\dot q = 0, \quad q = q_0 = const, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\partial\Pi(t,q_1,q_2,\dots,q_n)}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}\right\}$

Результат 2.

Предположим, что выполнены условия (1.5) – (1.7), а так же функция Π_0 удовлетворяет неравенству $\Pi_0(t,q_1,q_2,\dots,q_n) \geq a(\|q\|)$, где $a = a(\mu)$ - функции типа Хана, $a: R^+ \to R^+, a(0) = 0,\ \ a(\mu)$ строго монотонно возрастает, $\|q\|^2 = \ q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2$.

Тогда невозмущенное движение $\dot q = q = 0$ системы (1.1) является равномерно асимптотически устойчиво.

2. Модель системы виброзащиты с динамическим демпфером

Виброзащита объекта m осуществляется амортизатором жесткости c и реологическим энергопоглощающим элементом P (рис.1). Динамический демпфер представлен массой m_0 с наследственным элементом P_0. Это динамически определимая реологическая система. В качестве обобщенных координат представляется возможным выбрать абсолютное перемещение x массы m и относительное перемещение y массы m_0. Деформации реологических элементов P и P_0 определяются указанными перемещениями [5]

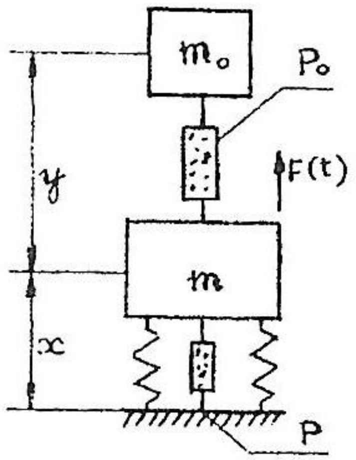

Рис. 1. Система виброзащиты с динамическим демпфером

Кинетическая и потенциальная энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}(m\dot x^2 + m_0(\dot x + \dot y)^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\mu x^2 + mgx + m_0 g(x+y) \quad (2.1).$$

Обобщенная активная сила

$$Q_x = F(t) - (m - m_0)g, \qquad Q_y = m_0 g \quad (2.2).$$

Реакции реологических элементов определяются уравнениями [5]

$$P = c\left(x - \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)$$

$$P_0 = c_0\left(y - \int_0^t R_0(t-\tau)y(\tau)d\tau\right) \quad (2.3)$$

$$m\ddot x + m_0(\ddot x + \ddot y) - F_0(x) + (\mu + c)x - c\int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau = -(m_0 + m)g$$

$$m_0(\ddot x + \ddot y) + c_0 y\int_0^t R_0(t-\tau)y(\tau)d\tau = -m_0 g \quad (2.4)$$

Система (2.4) будет иметь следующее предельное положение равновесия.

$$\dot x = \dot y = 0, \quad x = x_0 = \frac{F_0 - (m_0 + m)g}{\mu + c - cz_{10}}, \quad y = 0$$

$$z_{10} = \int\limits_0^\infty R(\tau)d\tau$$

Согласно результатам, полученным в первом разделе, при условиях

$$\mu + c - cz_{10} > 0, \quad z_{20} = \int_0^\infty R(\tau)d\tau < 1$$

это положение равновесия реологического осциллятора асимптотически устойчиво по $\dot{x}$, $\dot{y}$, x.

3. Модель движения реологического маятника

Рассмотрим стандартную реологическую модель из [5] (рис.2). Наследственные свойства нити маятника определяются уравнением

$$n\dot{P} + P = nc\dot{\rho} + \tilde{c}\rho \qquad (3.1)$$

При выборе в качестве обобщенных координат угла отклонения $\varphi(t)$ и удлинения $\rho(t)$ система по определению – простая динамически определимая. Кинетическая и потенциальная энергии для маятника записываются так:

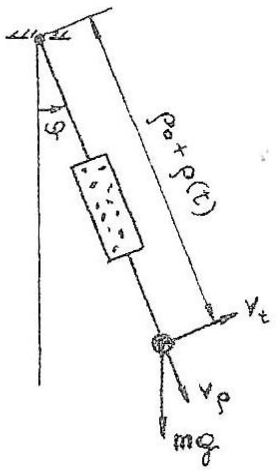

Рис. 2. Реологический маятник

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_t^2 + v_\rho^2\right) = \frac{1}{2}((\rho_0 + \rho)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)$$

$$\Pi = -mg(\rho_0 + \rho)(1 - \cos\varphi) \qquad (3.2)$$

Свойства наследственной нити маятника описываются уравнениями

$$P = c\left(\rho - \int_0^t R(t-\tau)\rho(\tau)d\tau\right)$$

$$\rho = \frac{1}{c}\left(P + \int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau\right) \qquad (3.3)$$

Соответствующие уравнения в релаксационной форме [1] имеют вид

$$m(\ddot{\rho} - (\rho_0 + \rho)\dot{\varphi}^2) + c\rho = -mg(1 - \cos\varphi) + c\int_0^t R(t-\tau)\rho(\tau)d\tau$$

$$m(\rho_0 + \rho)^2\ddot{\varphi} + 2(\rho + \rho_0)\dot{\rho}\dot{\varphi}) + mg(\rho_0 + \rho)\sin\varphi = 0 \qquad (3.4)$$

Уравнения (3.4) имеют положение равновесия $\dot{\rho} = \dot{\varphi} = 0, \quad \rho = 0, \quad \varphi = 0$

Согласно результатам первого раздела при условии $\int_0^\infty R(\tau)d\tau < c$ это положение реологического маятника асимптотически устойчиво по $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ и φ.

4. Модель динамически неопределимой наследственной системы

На рис.3 приведена динамически неопределимая система, в которой количество наследственных элементов превышает число степеней свободы [5].

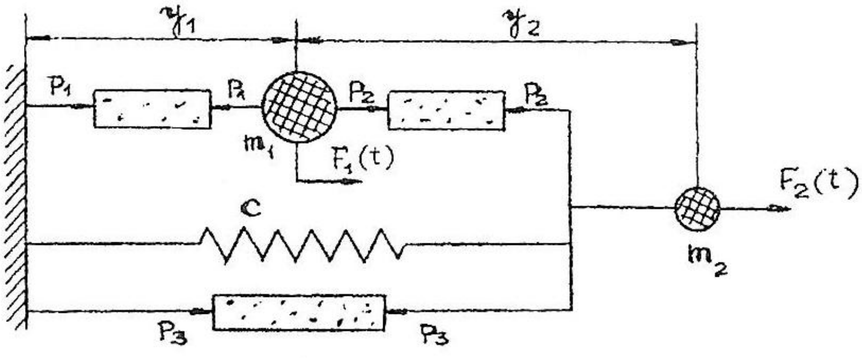

Рис. 3. Динамически неопределимая реологическая система.

Свойства наследственных элементов определяются релаксационными уравнениями [5].

$$P_1 = c_1\left(y_1 - \int_0^t R_1(t-\tau)y_1(\tau)d\tau\right)$$

$$P_2 = c_2\left(y_2 - \int_0^t R_2(t-\tau)y_2(\tau)d\tau\right) \qquad (4.1)$$

$$P_3 = c_3\left(y_1 + y_2 - \int_0^t R_3(t-\tau)(y_1+y_2)d\tau\right)$$

Кинетическая и потенциальная энергии определяются в виде:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2 + m_2(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}[c(y_1+y_2)^2] \qquad (4.2)$$

Уравнения движения имеют вид

$$m_1\ddot{y}_1 + m_2(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2) + c_1y_1 + (c+c_3)(y_1+y_2) = F_1 + F_2 + c_1\int_0^t R_1(t-\tau)y_1(\tau)d\tau + c_3\int_0^t R_3(t-\tau)(y_1+y_2)d\tau$$

$$m_2(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2) + c_2y_2 + (c+c_3)(y_1+y_2) = F_2 + c_2\int_0^t R_2(t-\tau)y_2(\tau)d\tau + c_3\int_0^t R_3(t-\tau)(y_1+y_2)d\tau \qquad (4.3)$$

Динамически неопределимая наследственная система (рис. 3) имеет нулевое положение равновесия $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0,\ y_1 = y_2 = 0$

На основании результатов первого раздела находим, что при условиях $c_1 > \int_0^\infty R_1(\tau)d\tau$, $c_2 > \int_0^\infty R_2(\tau)d\tau$, $c_3 > \int_0^\infty R_3(\tau)d\tau$ это положение равновесия асимптотически устойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00791).

Заключение

В настоящей работе была исследованы задачи об устойчивости положения равновесия эредитарных механических систем. А именно, были решены задачи об условиях предельного поведения трех реологических систем: системы виброзащиты с динамическим демпфером, реологического маятника и динамически неопределимой наследственной системы.

Список литературы

1. Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, М.: Физматлит, 1982. 304с.
2. Колтунов М. А. *К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации //* Механика полимеров, 1968, № 4.
3. Савин Г. Н., Рущицкий Я. Я. *Элементы механики наследственных сред*. Вища школа, Киев, 1976.
4. Andreev A.S., Peregudova O.A. *On the Stability and Stabilization Problems of Volterra Integro – Differential Equations* // Russian Jornal of Nonlinear Dynamics, 2018, v.14, no 3, p. 387 – 407.
5. Goroshko O.A., Puchko N. P. *Lagrangian equations for the multibodies hereditary systems //* J. Facta Universitatis, 1997, v. 2, № 7.