



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 2, с.20-23.

Поступила: 19.11.2019

Окончательный вариант: 05.12.2019

© УлГУ

УДК 519.87 + 004.9 + 573.2

Математическая модель истощения хрящевой ткани в велосипедных тренировках

Бутов А.А., Самохвалов М. В.*

* mvsamohvalov@yandex.ru

УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассматривается математическая модель процесса истощения хрящевой ткани. Процесс истощения описывается функцией Гомпертца: рассматриваются случаи высокого и низкого давления среды. Описания даны в терминах биостатистики. Также была построена компьютерная модель и анализируются ее параметры.

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерное моделирование, интенсивность, функция дожития.

Введение

Как известно, в настоящее время в условиях ухудшающейся экологии, роста цен на горючее и склонности населения к ведению здорового образа жизни, наблюдается развитие альтернативных видов транспорта. Основным выбором является велосипед. Он позволяет передвигаться со средней скоростью, большей пешеходной в 3-4 раза, а также поддерживать организм в хорошем состоянии.

Однако использование велосипеда сопряжено с некоторым риском. Исключая травмоопасность, главной проблемой при увеличении объёма тренировок является истощение хрящевой ткани, в особенности коленных суставов. Истощение наблюдается при недостаточном питании, неправильной технике тренировок, избыточной нагрузке, и прочих других факторах. Постепенное разрушение хрящевой ткани приводит к такому заболеванию, как артроз, которое очень сложно поддается лечению. Поэтому необходимо контролировать состояние суставов, обеспечивать должное питание, в частности, использование спортивного питания обосновано.

Состояние хрящевой ткани можно рассматривать в рамках модели Гомпертца. В нормальных условиях истощение происходит постоянно и оно критически мало, однако при интенсивных тренировках происходит быстрее. Также возможно использование спортивного питания, правильной техники, что увеличит устойчивость коленных суставов к износу. И наоборот: критические нагрузки, отсутствие должной физической подготовки увеличивает давление среды, что ускорит истощение.

1. Математическая модель Гомпертца-Мейкхама

Износ некоторой системы близок к проявлениям старения. Одной из первых математических моделей, описывающих процессы старения, является модель Гомпертца, в которой представлено наблюдаемое увеличение смертности с возрастом. Позднее, Мейкхам добавил в существующую модель Б. Гомпертца константу, которая обуславливала влияние внешней среды. Модель позволяет довольно просто описывать возрастное изменение смертности, и она без труда описывается дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\mu(t)} = \alpha, \quad \mu(0) = R. \quad (1)$$

где $\mu(t)$ - уровень смертности, $\alpha > 0$ – интенсивность смертности, $R > 0$ – давление среды.

Решение данного уравнения имеет вид:

$$\mu(t) = R \cdot e^{\alpha t}. \quad (2)$$

Накопленный риск соответственно равен:

$$H(t) = \int_0^t R \cdot e^{\alpha s} ds = \frac{R}{\alpha} \cdot (e^{\alpha t} - 1). \quad (3)$$

Исходя из этого, для функции дожития получаем:

$$S(t) = e^{-H(t)} = \exp\left\{-\frac{R}{\alpha} \cdot (e^{\alpha t} - 1)\right\}. \quad (4)$$

Таким образом, численность популяции, в соответствии с моделью Гомпертца-Мейкхама описывается выражением (4).

В соответствии с темой настоящей работы, модель следует рассматривать как состояние биологической системы, а именно - коленного сустава. Функция $S(t)$ в данном случае - состояние системы, α – интенсивность износа. На момент начала моделирования сустав предполагается здоровым, то есть с нулевым износом. С течением времени, в зависимости от параметров модели, заболевание развивается с той или иной скоростью.

2. Анализ параметров модели

Прогрессирующие заболевания коленных суставов обычно несут степенной характер. Так, выделяют три степени артроза:

- I степень – истощение хрящевой ткани от 20 до 60%;
- II степень – от 60 до 90%;

- III степень – от 90% до полного истощения.

Обозначив границы развития заболевания, а также рассматривая параметр α как уровень наследственной предрасположенности к артрозу, а R - интенсивность и качество велосипедных тренировок, с помощью компьютерного моделирования можно провести анализ параметров и сделать выводы о том, как происходит разрушение хряща при тех или иных условиях.

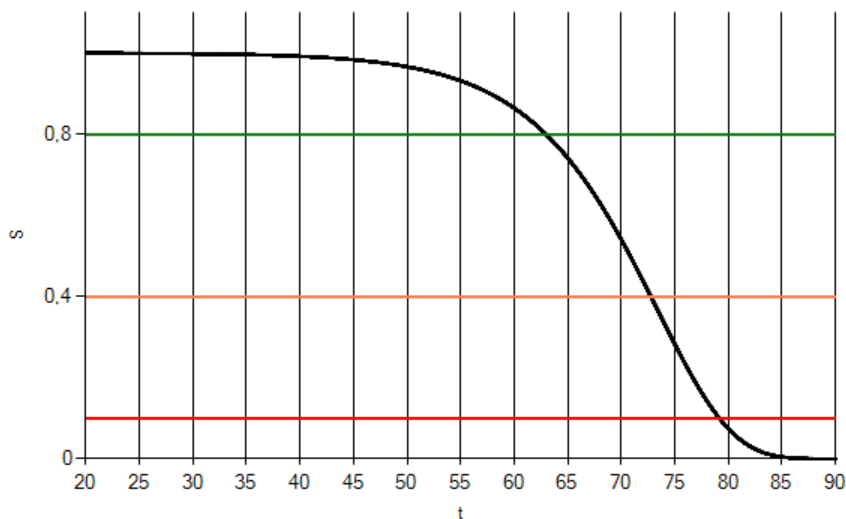


Рис.1. Модель Гомпертца-Мейкхама при $R = 0.0005$. Наступление заболевания в 63 года.

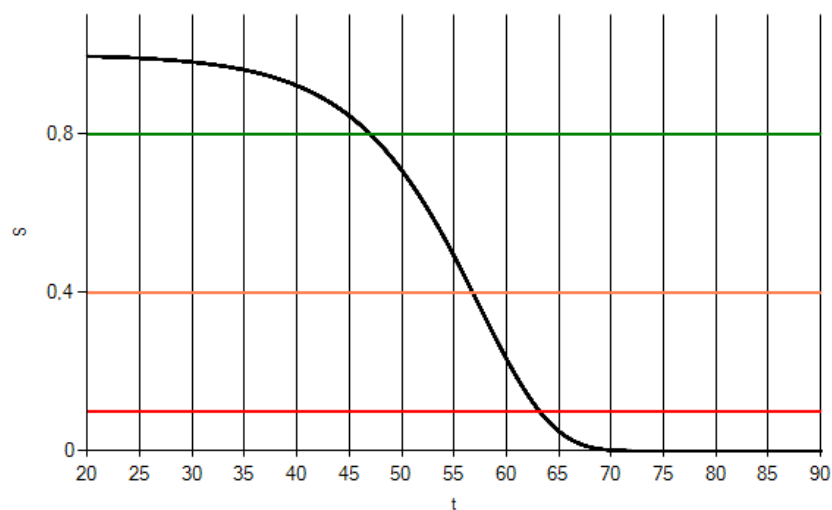


Рис.2. Модель Гомпертца-Мейкхама при $R = 0.005$. Наступление заболевания в 47 лет.

Поскольку процесс рассматривается в рамках одного индивидуума, а основной целью является изучение давления среды, то во всех случаях была принята единая интенсивность износа $\alpha = 0.4$. Время моделирования – от 20 до 90 лет.

Результат моделирования представлен графически на рис.1.

При увеличении параметра R в 10 раз происходит смещение кривой к ранним возрастам в соответствии с графиком, представленным на рис.2.

Результат моделирования при последующем увеличении R показан на рис.3.

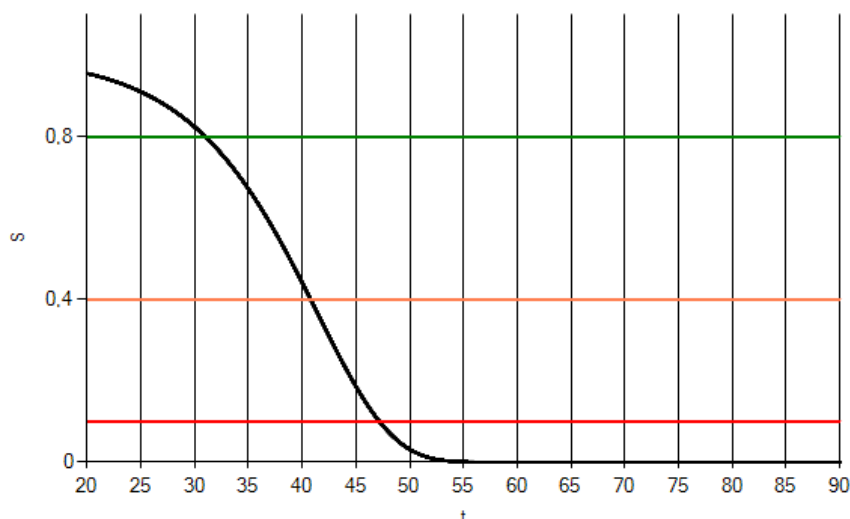


Рис.3. Модель Гомпертца-Мейкхама при $R = 0.05$. Наступление заболевания в 31 год.

Отметим, что полученные в результате моделирования значения оценок возраста наступления заболевания согласуются со статистическими показателями при соответствующих уровнях генетической предрасположенности.

3. Выводы

Проанализировав зависимость модели от параметра R , можно сделать вывод, что внешняя среда оказывает существенное влияние на процессы старения в организме.

Так, при высоких физических нагрузках (например, в велоспорте), появляется большой риск получить в среднем возрасте те заболевания, которые преимущественно относятся к пожилому поколению. Риск можно уменьшить, если подходить к нагрузкам осознанно: соблюдать график тренировок, равномерно увеличивать нагрузки, отталкиваться от собственных возможностей.

Список литературы

1. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. *Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем* // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 9-2. С. 219-222.
2. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. *Математическая модель изменений в компенсации износа при старении* // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2018. № 4. С. 14-17.
3. Бутов А.А. *Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: методическое пособие. Ч. 2*. Ульяновск: УлГУ, 2015.