Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн., 2019, № 2, с.81-88.

Поступила: 06.10.2019
Окончательный вариант: 29.11.2019

УДК 519.218.5

Семимартингальная модель СМО с произвольным временем ожидания «нетерпеливых» заявок

Савинов Ю.Г.,* * *Тихоненко А.А.,
Пронин В.И., Щукин А.Н.

*uras@aport.ru
УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена математическая модель многоканальной СМО с «нетерпеливыми» заявками с произвольным временем ожидания «нетерпеливых» заявок. Модель описана в терминах точечных процессов и их компенсаторов. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, которые необходимы для имитационного моделирования.

Ключевые слова*: система массового обслуживания, нетерпеливые заявки, семимартингальное описание, точечный процесс, компенсатор.*

Введение

Несмотря на широкую область потенциальных приложений, в литературе по теории очередей методам моделирования и расчета многоканальных немарковских СМО с «нетерпеливыми» заявками не уделяется должного внимания [1]. Среды имитационного моделирования (GPSS, AnyLogic и т.д.) также не поддерживают данный класс систем с очередями [1]. Аналитические методы анализа подобных немарковских СМО (см., например, [2-6]) требуют использования продвинутого математического аппарата (введении функции Миттаг-Леффлера или вырожденной гипергеометрической функции Куммера), а результаты, полученные этими методами, не подходят для имитации, поскольку содержат суммы бесконечных рядов. Для расчета многоканальных немарковских СМО с «нетерпеливыми» заявками также можно использовать аппроксимацию непоказательных распределений распределениями фазового типа [7-9], но сложность таких аппроксимаций быстро растет с увеличением числа каналов в СМО.

В данной работе представлена модель СМО с «нетерпеливыми» заявками в семимартингальных терминах [10-11]. Такое семимартингальное (траекторное) описание СМО (в терминах считающих процессов и их компенсаторов) позволяет легко переходить от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование, а сложность математической и компьютерной модели практически не растет с ростом числа каналов в СМО. Другие модели СМО в траекторном описании можно найти, например, в [12-18]). В отличие от предыдущих работ [12-13], в данной работе рассмотрен не классический случай Баррера [19-20], а произвольное распределение времени ожидания «нетерпеливых» заявок.

1. Постановка задачи

Данная работа является обобщением работы [12] на случай произвольного случайного времени ожидания «нетерпеливых» заявок. Рассмотрим систему массового обслуживания с ограниченным временем ожидания τ, с пуассоновским входящим потоком с интенсивностью $\lambda > 0$, состоящую из n приборов и имеющую общую неограниченную очередь. Обслуживание экспоненциальное с интенсивностью $\mu > 0$. Каждая заявка, поступившая в СМО, либо начинает обслуживаться сразу, если имеется хотя бы один свободный прибор, либо встает в очередь на обслуживание. Если заявка за время τ с момента поступления не была подана на обслуживание, то она теряется (нетерпеливо покидает систему).

2. Математическая модель

Опишем многоканальную СМО с произвольным ограниченным временем ожидания (см. рРис.1).

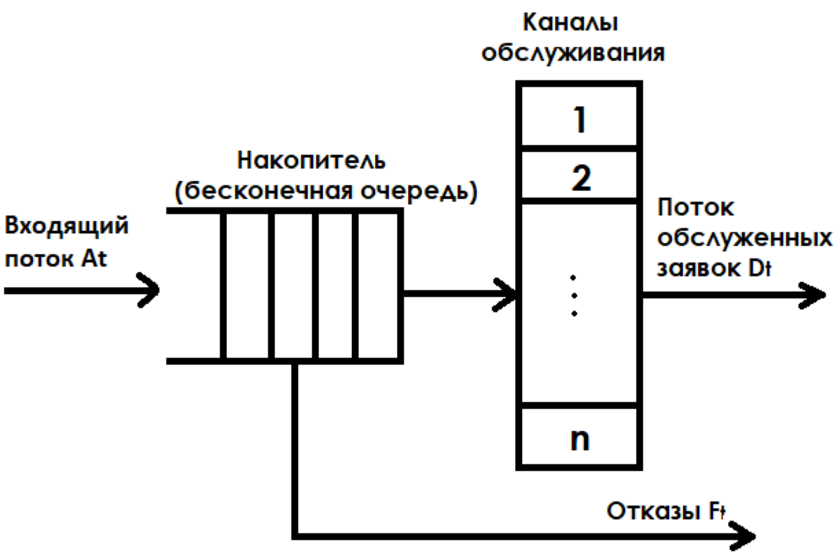

Рис.1. Схема многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания

Для семимартингального описания СМО введем считающие процессы [10]: $A = (A_t)_{t\geq 0}$ – число заявок, поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0 = 0$, $D = (D_t)_{t\geq 0}$ – число обслуженных заявок в СМО за время $t \geq 0$, $D_0 = 0$, $F = (F_t)_{t\geq 0}$ – число заявок, которые «нетерпеливо» покинули СМО за время $t \geq 0$, $F_0 = 0$.

Тогда для ξ_t – числа заявок в СМО в момент времени $t \geq 0$ можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t = \xi_0 + A_t - D_t - F_t \,, \tag{1}$$

где $\xi_0 \geq 0$ - число заявок в СМО при $t = 0$. Точечные процессы A, D определяются своими компенсаторами $\tilde{A} = (\tilde{A}_t)_{t\geq 0}$ и $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_t)_{t\geq 0}$ в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [10]:

$$A_t = \tilde{A}_t + m_t^A, \tag{2}$$

$$D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D, \tag{3}$$

где $\tilde{A}$ и $\widetilde{D}$ - неубывающие предсказуемые процессы, m_t^A и m_t^D- мартингалы.

Для рассматриваемой в данной работе СМО с нетерпеливыми заявками $A = (A_t)_{t\geq 0}$ - пуассоновский процесс с компенсатором:

$$\tilde{A}_t = \lambda \cdot t, \ \lambda > 0. \tag{4}$$

Компенсатор для процесса определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t \mu \cdot min\,(\xi_s, n)\ ds \,, \tag{5}$$

то есть интенсивность обслуживания заявок определяется числом заявок, находящихся в СМО и числом обслуживающих приборов. Если число заявок превышает число обслуживающих приборов, то интенсивность обслуживания максимальная и равна $\mu \cdot n$ (обслуживается n заявок, остальные в очереди).

Пусть τ_j – это время ожидания j-ой заявки (заявки читаются по мере поступления в СМО). То есть случайная величина τ в момент поступления j-ой заявки в систему приняла значение τ_j. Момент поступления j-ой заявки в СМО определяется следующей формулой (момент поступления j-ой заявки равен моменту j-ого скачка процесса A):

$$\sigma_j = \{t > 0 \mid A_t = j\}, \tag{6}$$

Число «нетерпеливых» заявок за время от 0 до t можно, очевидно, определить следующей формулой:

$$F_t = \sum_{j=1}^{A_t} F_t^j \,, \tag{7}$$

где $F_t^j = \begin{cases} 1, \text{ если } j - \text{ая заявка ушла из СМО «нетерпеливо» к моменту } t, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$

Размер очереди q_t в момент $t \geq 0$ определяется по следующей формуле (от количества заявок в системе в момент t отнимаем количество приборов, так как при $n \geq \xi_t > 0$ пришедшие заявки сразу начинают обслуживаться, и при $\xi_t \leq n$ очередь равна 0):

$$q_t = (\xi_t - n)^+. \tag{8}$$

Условие, что j-ая заявка встала в очередь (а не стала сразу обслуживаться) можно представить в виде $\left\{\xi_{\sigma_j} \geq n\right\}$, то есть к моменту поступления j-ой заявки, в СМО уже находится не менее n заявок.

Пусть Y_t^j – число «нетерпеливых» заявок, ушедших за время от 0 до t и пришедших раньше j-ой заявки. Тогда для Y_t^j можно написать следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} Y_t^j = Y_t^{j-1} + F_t^{j-1}, \text{ если } j = n+2,..A_t \\ Y_t^j = 0, \qquad \text{если } j = 1,2..n+1 \end{cases}, \tag{9}$$

то есть, начиная с $(n+2)$-ой заявки, число «нетерпеливо» ушедших за время t заявок, пришедших раньше j-ой заявки, равно числу «нетерпеливо» ушедших раньше $(j-1)$-ой, плюс одна заявка, если «нетерпеливо» ушла и $(j-1)$-ая заявка.

Уйдет ли «нетерпеливо» j-ая заявка к моменту $t \geq \sigma_j$ (см. рис. 2), определяется следующим условием:

$$F_t^j = I\left(\xi_{\sigma_j} \geq n\right) \cdot I\left(D_t + Y_t^j < j - n\right) \cdot I\left(\sigma_j + \tau_j = t\right), \tag{10}$$

то есть, j-ая заявка «нетерпеливо» уходит из системы (это возможно только в момент $\sigma_j + \tau_j$), если в момент прихода в систему заявка встаёт в очередь (все приборы заняты) и если очередь до неё так и не дошла.

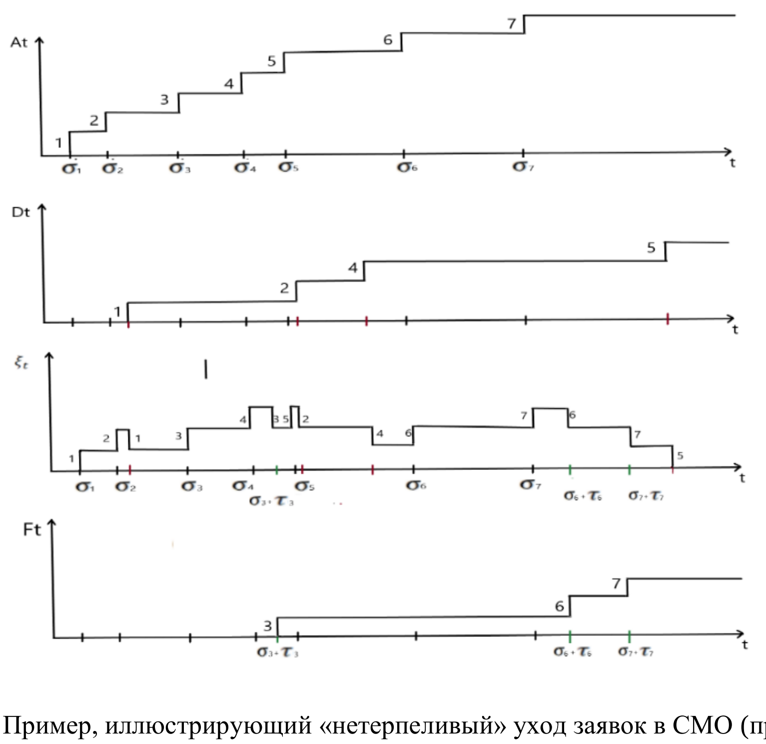

Рис.2. Пример, иллюстрирующий «нетерпеливый» уход заявок в СМО (при n=1)

Условие $D_t + Y_t^j < j - n$ означает, что число обслуженных плюс число «нетерпеливо» ушедших (кто стоял раньше в очереди), меньше номера в очереди j-ой заявки, то есть очередь до j-ой заявки так и не дошла.

Заметим, что формула (7) может быть переписана (т.к. $dA_s = 1$ в точках σ_j, $dA_s = 0$ в остальных точках) в виде (11), также удобном для последующего имитационного моделирования:

$$F_t = \int_0^t (I(\xi_s \geq n) I(D_s + Y_s^{A_s} < A_s - n) \cdot I(s + \tau_{A_s} = t) dA_s, \tag{11}$$

где ξ_t – число заявок в СМО в момент времени t, τ_{A_s} – время ожидания A_s *–той* заявки (у каждой заявки своё время ожидания, $Y_t^{A_t}$ – число «нетерпеливых» заявок, ушедших за время от *0* до t, пришедших раньше A_t *–той* заявки.

Просуммировав по j, из рекуррентной формулы (9), получим:

$$Y_t^j = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j-n-1} F_t^{n+k}, \text{ если } j = n+2, .. A_t, \\ 0, \text{ если } j = 1,2..n+1. \end{cases} \tag{12}$$

При этом, как видно из формул (10), (12), Y_t^{n+2} выражается через F_t^{n+1} и т.д., а F_t^{n+1} через Y_t^{n+1}. В свою очередь $Y_t^{n+1} = 0$, так не может быть «нетерпеливых» заявок, ушедших за время от 0 до t и пришедших раньше $(n+1)$-ой заявки, поскольку первые n заявок сразу поступают на обслуживание). То есть «зацикливания» не происходит, и по известным в момент $t \geq \sigma_j$ значениям $\xi_{\sigma_j}, D_t, \tau_j$ пересчитываются все F_t^j, Y_t^j. Что дает возможность найти по формуле (7) значение F_t . Таким образом, получены в явном виде основные уравнения (1)-(12), которые допускают последующее имитационное моделирование.

3. Итерационные формулы для компьютерного моделирования

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. Из формул (1)-(5) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения [10-11]:

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{13}$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = \min(n, \xi_t) \cdot \mu \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{14}$$

Введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda \cdot \Delta \ll 1, n\mu \cdot \Delta \ll 1$, получим следующие итерационные формулы.

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda), \tag{15}$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta(\min(n, \xi_t)\mu), \tag{16}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, \text{ с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Далее на каждом итерационном шаге от t к $t + \Delta$ по формулам (7), (10), (12), в которых t надо заменить на $t + \Delta$, а $A_{t+\Delta}$, $D_{t+\Delta}$ определяются формулами (15)-(16), пересчитываются последовательно $Y_{t+\Delta}^1, F_{t+\Delta}^1, Y_{t+\Delta}^2, F_{t+\Delta}^2, \dots Y_{t+\Delta}^{n+1}, F_{t+\Delta}^{n+1}, \dots . F_{t+\Delta}$:

$$Y_{t+\Delta}^{j}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{j-n-1}F_{t+\Delta}^{n+k}, & \text{если } j=n+2,..A_t,\\ 0, & \text{если } j=1,2..n+1.\end{cases}$$

$$F_{t+\Delta}^{j}=I\left(\xi_{\sigma_j}\geq n\right)\cdot I\left(D_{t+\Delta}+Y_{t+\Delta}^{j}<j-n\right)\cdot I\left(\sigma_j+\tau_j=t\right),$$

$$F_{t+\Delta}=\sum_{j=1}^{A_{t+\Delta}}F_{t+\Delta}^{j}.$$

После этого пересчитывается число заявок в СМО в момент $t+\Delta$: $\xi_{t+\Delta}=\xi_0+A_{t+\Delta t}-D_{t+\Delta}-F_{t+\Delta}$. И происходит переход к следующей итерации (шаг от $t+\Delta$ к $t+2\Delta$).

Список литературы

1. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. *Имитационное моделирование систем с «нетерпеливыми» заявками* // Имитационное моделирование. Теория и практика: тр. VI Всерос. конф. Казань, 2013, с. 339-342.
2. Кирпичников А.П., Флакс Д.Б., Валеева Л.Р. *Системы массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе* // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2015, №1, с. 68-73 .
3. Кирпичников А.П., Бусарев М.И., Флакс Д.Б. *Одноканальная система массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе в целом* // Вестник технологического университета, 2011, в.22, с. 155-161.
4. Кирпичников А.П., Флакс Д.Б. *Вероятностные характеристики открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание заявки в системе* // Вестник технологического университета, 2014, т.17, в.24, с.422-425.
5. Кирпичников А.П., Флакс Д.Б., Галямова К.Н. *Вероятность ожидания начала обслуживания в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в системе* // Вестник технологического университета, 2016, т.19, в.11, с. 122-125.
6. Кирпичников А.П., Флакс Д.Б., Галямова К.Н. *Общее число требований в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в системе* // Вестник технологического университета, 2017, т.20, в.5, с. 95-97.
7. Roubos A. *Call Centers with Hyperexponential Patience Modeling* / A. Roubos, O. Jouini // International Journal of Production Economics, 2013, v.141, p. 307-315.
8. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. *Расчет гиперэкспоненциальной системы M/H2/n-H2 с заявками, нетерпеливыми в очереди* // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2014, № 2(27), с. 47-53.

9. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. *Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания* // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2016, № 3(36), с. 60-65.
10. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2009.
11. Бутов А.А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2007.
12. Столяров И.А. *Семимартингальная модель многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания* / И.А. Столяров, Е.Д. Табакова, Ю.Г. Савинов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. В двух частях. Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2018, Часть 1, с. 502-506.
13. Савинов Ю. Г., Табакова Е.Д., Сафиуллов И.Д. *Оптимизация в СМО с нетерпеливыми заявками* // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн., 2019, № 1, с. 92-98.
14. Савинов Ю. Г. *Семимартингальные аналоги классических моделей СМО* / Ю. Г. Савинов, А. Н. Медведева, И. В. Петров, А. М. Иванов // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: сб. ст. по материалам XL Международной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии». № 4(32). М., Изд. «Интернаука», 2016, с. 68-74.
15. Столяров И.А. *Семимартингальная модель СМО с динамическим приоритетом / И.А. Столяров, Ю.Г. Савинов //* Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы III научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 24-25 апреля 2017 г. Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2017, с. 553-557.
16. Бутов А.А. *Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах* / А.А.Бутов, Л.А. Галимов // Современные проблемы науки и образования, 2015, № 2, с. 758.
17. Бутов А.А. *Стохастическая имитационная модель оценки резерва произошедших, но не заявленных страховых убытков в терминах СМО* / А.А.Бутов, Л.А. Галимов // Фундаментальные исследования. 2016, № 8-2, с. 234-238.
18. Бутов А.А. *Оптимальное управление распределением заявок в многоканальной системе массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком поступления заявок и экспоненциальным временем обслуживания* / А.А.Бутов, Л.А. Галимов // Естественные и технические науки, 2014, № 9-10 (77), с. 244-247.

19. Barrer D.Y. *Queuing with Impatient Customers and Indifferent Clerks* // Operation Research, 1957, v. 5, № 5, p. 294-400.
20. Гнеденко Б.В. *Несколько замечаний к двум работам Д.Баррера* // Buletinul Institutului Politehnic, din iasi, seria noua, t.5(9), fas.1-2, 111-118.