Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, № 2, с. 24-29.

Поступила: 16.10.2019
Окончательный вариант: 27.11.2019

УДК 681.5.075

Анализ гибридной стохастической модели движения объекта по сложной траектории

Голубков А.В.**, *Столярова И.В.

*kr8589@gmail.com
УлГПУ им. И.Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

Работа посвящена анализу свойств наблюдаемости и управляемости математической модели движения объекта по сложной траектории, состоящий из участков прямолинейного движения и движения по окружности при повороте влево или вправо с постоянной скоростью. Подобные траектории характерны для многих технических объектов, в том числе для мобильных роботов. Рассмотрена гибридная стохастическая модель, представленная набором дискретных линейных моделей стохастических систем, каждая из которых соответствует конкретному виду траектории. Проведен анализ свойств полной наблюдаемости и управляемости гибридной стохастической модели. На основе проверки критерия полной наблюдаемости дискретной линейной динамической системы решена задача о выборе оптимального набора сенсоров, при котором гибридная стохастическая модель сохраняет свойство полной наблюдаемости. Доказано, что измерения координат объекта являются обязательными для сохранения свойства полной наблюдаемости.

Ключевые слова*: гибридная стохастическая модель; наблюдаемость линейной динамической системы; матрица наблюдаемости; управляемость линейной динамической системы; матрица управляемости.*

Введение

Задачи математического моделирования траекторий движущихся объектов, слежения за движущимися объектами, распознавания движущихся объектов, сопровождения целей являются актуальным предметом современных научных исследований в силу важности практических приложений, в которых используются решения этих задач [1]. В реальных, практических задачах траектория движения объекта является сложной, в общем случае ее трудно представить какой-то конкретной математической моделью, пусть даже и нелинейной. Наиболее часто для моделирования траекторий движения в условиях априорной неопределенности используют различного рода нелинейные стохастические модели в непрерывном либо в дискретном времени (см., например, [2,3]).

В настоящее время основным существующим подходом к решению задач оценивания параметров движения объектов является так называемый многомодельный (multiple-model, ММ) подход [4], подробно исследованный в работах П.Д. Хэнлона и П.С. Мейбека [5,6]. Известными методами решения задач на основе многомодельного подхода являются статическое ММ-оценивание, динамическое ММ-оценивание, интерактивное ММ-оценивание [4]. Однако данные методы требуют вычисления оценок параметров движения по каждой модели вдоль всей траектории, что требует больших вычислительных затрат и не позволяют обнаружить смену режима движения.

Альтернативный подход к решению указанных выше задач использует гибридную стохастическую модель для представления сложной траектории движения объекта, что избавляет от необходимости вычислять оценки по всему множеству моделей, а разработанные алгоритмы позволяют обнаружить изменение режима движения [7–10].

Такой подход к решению задачи моделирования и оценивания параметров движения объекта по сложной траектории имеет преимущество в том, что нелинейная в целом математическая модель движения заменяется набором линейных динамических моделей, для которых на каждом участке для оценки параметров движения можно применять вместо нелинейных фильтров оптимальные дискретные алгоритмы калмановской фильтрации, тем самым избегая появления неизбежных погрешностей вычислений вследствие линеаризации. Полученные с применением данного подхода решения могут быть использованы в задачах слежения за движением технических объектов, например, в задачах робототехники и судовождения.

Цель данной работы заключается в анализе свойств гибридной стохастической модели, имеющей следующую структуру. Предположим, что сложная траектория подвижного объекта может быть представлена набором участков, каждый из которых можно представить некоторой дискретной линейной стохастической моделью. Рассмотрим три модели движения: равномерное прямолинейное движение, круговое равномерное движение при повороте вправо либо влево с заданным радиусом. Тогда движение объекта можно описать гибридной стохастической моделью

$$x_k = \Phi_i x_{k-1} + B_i + G w_{k-1}. \tag{1}$$

Здесь k – дискретный момент времени, $i \in \{0,1,2\}$ – номер режима движения; $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ – вектор состояния (параметры движения объекта), где координата x_1 описывает положение объекта вдоль оси Ox, x_2 – скорость v_x вдоль оси Ox, x_3 – координата вдоль оси Oy, x_4 – скорость v_y вдоль оси Oy.

Матрицы-параметры гибридной стохастической модели запишем в следующем виде:

1) прямолинейное равномерное движение, номер режима движения $i = 0$:

$$\Phi_0 = \Phi_0(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \Phi_p \end{bmatrix},\ \Phi_p = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$ – шаг дискретизации.

2) круговое равномерное движение при повороте влево ($i = 1$) и круговое равномерное движение при повороте вправо ($i = 2$) с заданным радиусом r:

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(x_s, r, \tau) = \begin{bmatrix} \Phi_c & 0 \\ 0 & \Phi_c \end{bmatrix}, \ \Phi_c = \begin{bmatrix} \cos\omega\tau & \omega^{-1}\sin\omega\tau \\ -\omega\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{bmatrix},$$

$$B_1(x_s, r, \tau) = \begin{bmatrix} (x_{1,s} - \omega^{-1}x_{4,s})(1-\cos\omega\tau) \\ (\omega x_{1,s} - x_{4,s})\sin\omega\tau \\ (x_{3,s} + \omega^{-1}x_{2,s})(1-\cos\omega\tau) \\ (\omega x_{3,s} + x_{2,s})\sin\omega\tau \end{bmatrix}, \ B_2(x_s, r, \tau) = \begin{bmatrix} (x_{1,s} + \omega^{-1}x_{4,s})(1-\cos\omega\tau) \\ (\omega x_{1,s} + x_{4,s})\sin\omega\tau \\ (x_{3,s} - \omega^{-1}x_{2,s})(1-\cos\omega\tau) \\ (\omega x_{3,s} - x_{2,s})\sin\omega\tau \end{bmatrix},$$

где r – радиус движения по окружности, $\omega = |v_s|/r > 0$, $v_s = \begin{bmatrix} x_{2,s} \\ x_{4,s} \end{bmatrix}$ – вектор скорости в точке с координатами $(x_{1,s}, x_{3,s})$, в момент смены режима движения.

Модель измерений запишем в виде:

$$z_k = Hx_k + v_k, \tag{2}$$

где матрица H – матрица измерений, v_k – вектор ошибок измерений, являющийся гауссовым белым шумом с нулевым математическим ожиданием и диагональной ковариационной матрицей $R = \mathrm{diag}[\rho_1, \rho_2]$.

1. Наблюдаемость гибридной стохастической модели

Проведем анализ полной наблюдаемости гибридной стохастической модели (1) при различных вариантах измерительной схемы (2). Рассмотрим все возможные варианты выбора матрицы измерений H:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ H_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся определением матрицы наблюдаемости и критерием полной наблюдаемости дискретной линейной динамической системы [11].

Система называется *наблюдаемой* [3, Определение 2.11] в момент времени t_0, если для некоторого момента времени $t_1 > t_0$ по реализациям $u(t)$ и $z(t)$ можно определить состояние $x(t_0) = x_0$.

Система называется *полностью наблюдаемой* [3, Определение 2.12], если она наблюдаема в любой момент времени.

Матрицей наблюдаемости [11, Определение 2.16] линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица M_{DTI} следующего вида:

$$M_{DTI} = [H^T \quad \Phi^T H^T \quad (\Phi^T)^2 H^T \quad \cdots \quad (\Phi^T)^{n-1}]^T, \tag{3}$$

где n – размер вектора состояния системы.

Критерий полной наблюдаемости [11, Теорема 2.11]: Чтобы линейная инвариантная во времени дискретная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнения условия $rank\ M_{DTI} = n$.

В таблице 1 приведены результаты анализа наблюдаемости гибридной модели для различных вариантов измерительной схемы, определяемых матрицами H_1–H_{15}. Решение получено в системе символьных вычислений Maple.

Таблица 1. Ранг матрицы наблюдаемости для различных вариантов схемы измерений

Матрица измерения	Ранг матрицы наблюдаемости для модели прямолинейного движения	Ранг матрицы наблюдаемости для модели равномерного движения по окружности
H_1	4	4
H_2	4	4
H_3	3	4
H_4	4	4
H_5	3	4
H_6	2	2
H_7	4	4
H_8	3	4
H_9	3	4
H_{10}	2	4
H_{11}	2	2
H_{12}	2	2
H_{13}	1	2
H_{14}	2	2
H_{15}	1	2

По результатам вычислений видно, что полностью наблюдаемой является гибридная модель с измерительными схемами H_1, H_2, H_4 и H_7, причем минимальным количеством измеряемых элементов вектора состояния, достаточных для выполнения критерия полной наблюдаемости, обладает только схема измерений с матрицей H_7.

Таким образом, мы доказали, что измерения координат, описывающих положение объекта (x_1 и x_3), являются обязательными для выполнения критерия полной наблюдаемости, в то время как измерение проекций скоростей (x_2 и x_4) избыточны для сохранения моделью свойства полной наблюдаемости.

2. Управляемость гибридной стохастической модели

Исследуем модель (1) – (2) на свойство полной управляемости.

Система называется *управляемой* [3, Определение 2.5], если для произвольного момента времени t_0 и начального состояния $x(t_0) = x_0$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, и момент $t > t_0$, что единственное решение $x(t)$ при данных начальных условиях $x(t_0) = x_0$ пройдет через заданную точку $x(t_1) = x_1$.

Система называется *полностью управляемой* [3, Определение 2.6]**,** если она управляема в любые моменты времени и при любых начальных условиях.

Матрицей *управляемости* [11, Определение 2.10] линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица W_{DTI} следующего вида:

$$W_{DTI} = [B|\Phi B|\Phi^2 B|\Phi^3 B]. \quad (4)$$

Критерий полной управляемости [11, Теорема 2.7]: Чтобы дискретная линейная инвариантная во времени система была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости W_{DTI} был равен n, т. е. числу строк в матрице Φ.

В таблице 2 приведены результаты анализа управляемости гибридной модели. Решение получено в системе символьных вычислений Maple.

Таблица 2. Ранг матрицы управляемости гибридной модели

Ранг матрицы управляемости для модели прямолинейного движения	Ранг матрицы управляемости для модели равномерного кругового движения при повороте влево	Ранг матрицы управляемости для модели равномерного кругового движения при повороте вправо
0	2	2

Для модели прямолинейного равномерного движения матрица $B_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $rank\ W_{DTI} = 0$. Следовательно, модель не является управляемой.

Для моделей движения по окружности при повороте влево и вправо $rank\ W_{DTI} = 2$. Следовательно, гибридная стохастическая модель (1)–(2) не является полностью управляемой.

Заключение

В данной работе проведен анализ свойств наблюдаемости и управляемости гибридной стохастической модели движения объекта по сложной траектории, которая описывает три типа траекторий движения объекта: прямолинейное равномерное движения, движение по окружности с постоянной скоростью и заданным радиусом при повороте влево или вправо.

В работе решена задача выбора минимального набора сенсоров, при котором гибридная стохастическая модель сохраняет свойство полной наблюдаемости. Решение задачи основано на проверке критерия полной наблюдаемости дискретной линейной инвариантной во времени системы. Доказано, что измерения координат объекта являются обязательными для выполнения критерия полной наблюдаемости, а измерение проекций скоростей избыточны для сохранения свойства полной наблюдаемости. Также проведен анализ свойства управляемости гибридной стохастической модели. Показано, что гибридная стохастическая модель не является полностью управляемой.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и Правительством Ульяновской области (грант № 18-41-732003 р_мк).

Список литературы

1. Коновалов А.А. *Основы траекторной обработки радиолокационной информации*. СПб.: Изд-во СПбГУ "ЛЭТИ", 2013.
2. Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Захаров К.В. *Устойчивые алгоритмы фильтрации – обзор и новые результаты для систем судовождения и управления судном* // Информационные технологии и вычислительные системы. 2013, № 4, с. 90–112.
3. Kim M.-S., Koh J.-H., Nguyen H.Q.P., Kang H.-J. *Robot Visual Servo through Trajectory Estimation of a Moving Object Using Kalman Filter*. In: Huang D.-S., Jo K.-H., Lee H.-H., Kang H.-J., Bevilacqua V. (eds) Emerging Intelligent Computing Technology and Applications. ICIC 2009. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5754. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
4. Bar-Shalom Y., Li X.-R., Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2002.
5. Hanlon P.D., Maybeck P.S. *Multiple-model adaptive estimation using a residual correlation Kalman filter bank* // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 36, no. 2, p. 393–406, April 2000.
6. Hanlon P.D., Maybeck P.S. Interrelationship of Single-Filter and Multiple-Model Adaptive Algorithms // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. 34 , no. 3, pp. 934–946, July 1998.
7. Семушин И.В., Цыганов А.В., Цыганова Ю.В., Голубков А.В., Винокуров С.Д. *Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017, т. 10, № 3, с. 108–119.
8. Голубков А.В., Петрищев И.О., Цыганов А.В., Цыганова Ю.В. *Диагностика режима движения объекта на основе гибридной модели* // Вестник НГИЭИ. 2017, № 12 (79), с. 22−32.
9. Golubkov A.V., Tsyganov A.V., Tsyganova Yu.V. *Adaptive estimation of an object motion parameters based on the hybrid stochastic model* // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 1096, no. 1, p. 012166.
10. Tsyganov A.V., Tsyganova Yu.V., Golubkov A.V., Petrishchev I.O. *Adaptive estimation of a moving object trajectory using sequential hypothesis testing* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». 2019, т. 12, № 1, с. 156–162.
11. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. *Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие*. Ульяновск: УлГТУ, 2007. 75 с.