Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 1, с. 13-16.

Поступила: 20.05.2020
Окончательный вариант: 11.06.2020

УДК 519.218.5

Применение модели Гомпертца-Мейкхама при анализе технических систем

Бутов А.А.*[*], *Крысов И.В.

[*]butov.a.a@gmail.com
УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлены математическая и компьютерная модель многостадийного процесса старения, как для биологических организмов, так и для сложных технических систем.

Ключевые слова*: многостадийное старение, модель Гомпертца-Мейкхама, математическое моделирование, компьютерное моделирование.*

Введение

Общая идея спонтанной утраты жизнеспособности, положенная в основу формулы Б. Гомпертцем, является и в настоящее время краеугольным камнем современной геронтологии, так как позволяет наиболее просто и точно описывать возрастное изменение смертности человека и, видимо, других организмов.

Модель Гомпертца-Мейкхама с вытекающими из нее формулами не отвечает наблюдаемому явлению многостадийности старения (как биологических систем, так и сложных технических объектов). В частности, она не учитывает явлений онтогенетических перестроек в некоторые моменты времени с и для всех. После каждого из таких моментов наблюдается период повышенной смертности. Это локальное увеличение смертности вызвано возмущениями, привнесенной метаболической перестройкой при смене стадий. Оно влечет для живых систем последующую локальную дополнительную адаптацию.

1. Материалы и методы исследования

Основным предположением, положенным в основу модели наблюдаемого феномена смены онтогенетических фаз и уровней стабильного метаболизма (т.е. здесь – стадий старения), является следующая гипотеза. Предполагается, что для компенсации метаболической недостаточности (возникающей в результате исчерпания ресурсов текущей стадии) реализуется компенсаторная глобальная адаптивная перестройка, обеспечивающая на последующей стадии полноценное функционирование в рамках новой стадии. То есть, предполагается, что метаболические перестройки не могут проводиться ни постоянно, ни слишком часто, поскольку каждая из них влечет временную локальную дезадаптацию, временное увеличение уязвимости и повышение смертности (hazard rate).

Таким образом, каждая структурная перестройка (смена стадии) должна обеспечить возможность сложной технической системе устойчиво функционировать как можно дольше «обходясь» без очередного изменения структуры – т.е. перехода на новую стадию. В терминах модели - это можно сформулировать следующим образом.

Решается задача об оптимизации выбора моментов смены стадий в форме нахождения компромисса: за каждую смену стадий приходится «платить» временным увеличением смертности, обусловленным локальной дезадаптацией. При этом каждая такая смена стадий обуславливает возникновение нового устойчивого режима функционирования, устраняя дезадаптацию, сформировавшуюся в результате накопившегося износа, старения. В качестве адаптивной перестройки при отдельных сменах стадий встречается перевод системы в режим «форсированной» выработки энергии, что приводит к соответствию уровня производимой в единицу времени энергии (мощности) уровню необходимых затрат. В качестве альтернативы может наблюдаться изменение поведения, приводящее к существенному снижению ресурсных затрат, что также приводит к соответствию, адаптации..

Следовательно, представляется целесообразным рассмотреть в качестве основного процесс уровня соответствия $A = (A(t))_{t\geq 0}$ (accordance)

$$A(t) = \frac{C(t)}{R(t)}, \tag{1.1}$$

где $C(t)$ – мощность (capacity), которую потенциально может выработать субъект износа (приведенная, нормированная – например, на единицу веса), $R(t)$ – приведенная мощность, которая в среднем требуется (requirements) при его усредненной нагрузке (интенсивности эксплуатации, образе жизни, поведении).

В приведенных предположениях для наблюдаемой стадийности онтогенетических процессов, обозначим моменты смены стадий $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \ldots$ с $\tau_0 = 0$ и $\tau_n < \tau_{n+1}$ для всех $n = 0,1,2 \ldots$. Тогда на каждом интервале времени $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ при $n = 0,1,2 \ldots$. предполагается стабильность в выполнении соотношения

$$dA(t) = -\alpha_n A(t)dt\,, \tag{1.2}$$

при этом (в том числе, благодаря нормализации) критерием сохранения стадии является при $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ для каждого $n = 0,1,2 \ldots$ $A(t) > 1$. Также применим стохастический диффузионный аналог:

$$dA(t) = -\,\alpha_n A(t)dt + \sigma_n(t)dW_t\,, \tag{1.3}$$

где $W = (W(t))_{t \geq 0}$ - стандартный винеровский процесс и коэффициентом диффузии $\sigma_n(t) \neq 0$, являющимся при каждом $n = 0,1,2 \ldots$ функцией или не упреждающим функционалом $A = (A(t))_{t \geq 0}$. Соотношение (1.3) является основой математического стохастического моделирования, позволяющего учитывать индивидуальный случайный разброс в параметрах, в уровнях нагрузки и другие факторы.

2. Компьютерная модель

Построим процесс (1.3) . Дискретный аналог:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} - \lambda X_{t_i} \Delta + \sigma \xi_i \sqrt{\Delta}, \quad (2.1)$$

где X_{t_0}-начальное значение , $\xi_t \sim N(0,1)$.

Результат моделирования представлен на рис.1.

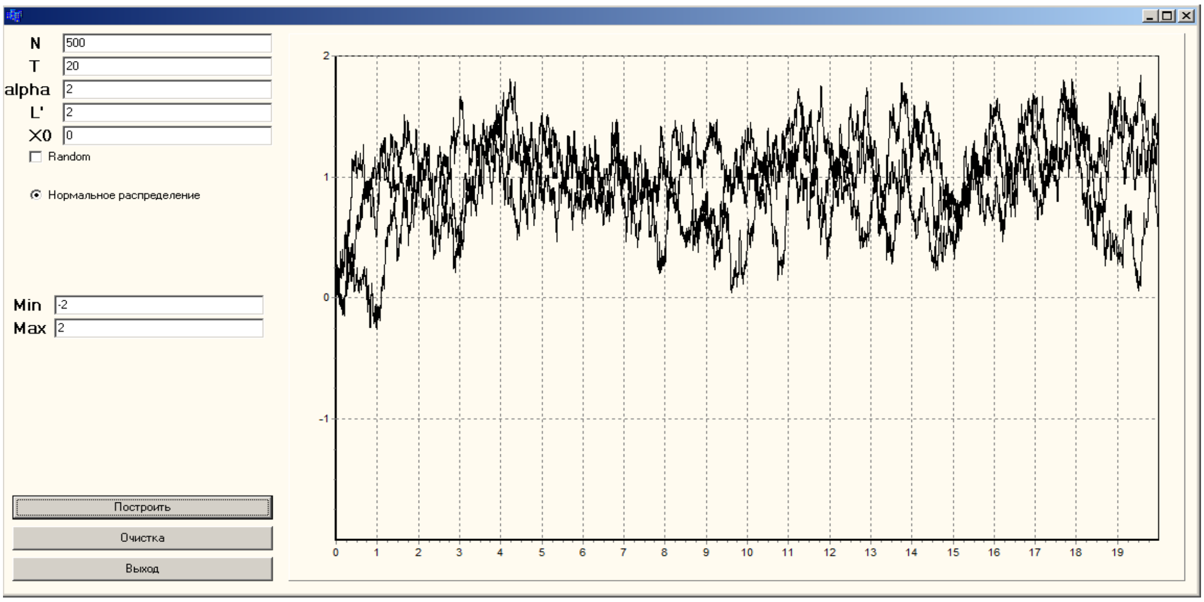

Рис. 1. Траектории процесса X_t с параметрами $X_0 = 0$, $\alpha = 2$, $\lambda = 2$.

Заключение

При математическом моделировании старение можно рассматривать как процесс накопления повреждений элементов и изменений внутренних свойств и такое накопление происходит с разной интенсивностью.

Теории накопленных разрушений, ошибок или мутаций, чаще описываются стохастическими моделями [2.1]. Особенностью модели является возможность рассуждения в терминах двух фундаментальных процессов: начальной смертности и темпа старения.

Список литературы

1. Бутов А.А. *Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: методическое пособие. Ч. 2.* Ульяновск: УлГУ, 2018.
2. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. *Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: методическое пособие. Ч. 4*. Ульяновск: УлГУ, 2018.
3. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем // *Фундаментальные исследования*. 2015, № 9-2, с. 219-222.
4. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2018, № 4, с. 14-17.