



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 1, с. 17-24.

Поступила: 12.05.2020

Окончательный вариант: 08.06.2020

© УлГУ

УДК 519.87 + 004.9 + 573.2

Математические модели многостадийного износа продуктивных систем

Бутов А.А., Самохвалов М.В.*

* mvsamohvalov@yandex.ru

УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассматриваются математические модели многостадийного износа продуктивных систем в мартингалльных терминах и функции дожития: представлены описания как износа без восстановления, так и с частичным или полным восстановлением. Сформулирована задача поиска оптимального уровня интенсивности и критерий «точно-в-срок» для продуктивных систем, а также представлены способы построения компьютерных моделей.

Ключевые слова: математическое моделирование, имитационное моделирование, стохастическая продуктивная система, выполнение операций, мартигал, компенсатор, интенсивность, функция дожития, износ, случайная среда, точно-в-срок.

Введение

В работе рассматриваются некоторые виды продуктивных систем, а также методы описания происходящих в них процессов износа и разрушения. В современном промышленном производстве, а также в организации сельского хозяйства, наблюдается некоторая общность подходов и методов организации продуктивных процессов. Наибольшую важность представляет надежное планирование, с целью минимизации возможных производственных потерь. Известным примером планирования является подход «точно-в-срок» (JIT, just-in-time). Возникший первоначально для задач промышленного производства, этот метод организации жизненного цикла распространился в последнее время на большинство сфер деятельности, такие как: программирование, тренировки, лечение и многие другие.

Современные продуктивные системы являются достаточно надежными и направлены на выполнение плана в установленные сроки, тем не менее, каждая система со временем частично или полностью утрачивает изначальную работоспособность. Так, при появляю-

щихся повреждениях в оборудовании некоторого предприятия возникают бракованные изделия, которые возвращаются на доработку или утилизируются, в результате чего возникают издержки производства, а реализация плана осуществляется в более позднее время. Заметим, что полное разрушение является крайне маловероятным событием, поскольку при своевременном восстановлении любой компоненты происходит компенсация износа всей системы: полное разрушение происходит обычно при простоях долгого времени и ввиду отсутствия отладки.

Анализ процессов износа опирается на описания из разделов физиологии, посвященных изучению геронтологии. Теории износа и разрушения многочисленны, но ни одна из них не принята за основу. Очень распространены формулировки в рамках функции дожития, которые представлены в работах Бенджамина Гомпертца. Большое значение имеют описания в мартингальных терминах точечных процессов, без труда сводимые к функции дожития при условии бесконечного числа объектов.

Одной из первых математических моделей, что описывает процессы старения, является модель Гомпертца, в которой представлено наблюдаемое увеличение смертности с возрастом. Позднее У. Мейкхам добавил в существующую модель Б. Гомпертца константу, которая обуславливала влияние внешней среды. Модель позволяет довольно просто показывать возрастное изменение смертности, и она без труда описывается дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{d\mu_t}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_t} = \alpha, \quad \mu_0 = R, \quad (1)$$

где μ_t - уровень смертности, $\alpha > 0$ – интенсивность смертности, $R > 0$ – давление среды.

Решение данного уравнения имеет вид:

$$\mu_t = R \cdot e^{\alpha t}. \quad (2)$$

Исходя из этого, для функции дожития получаем:

$$S(t) = \exp\left\{-\frac{R}{\alpha} \cdot (e^{\alpha t} - 1)\right\}. \quad (3)$$

Отметим, что представленная модель не отвечает требованию многостадийности износа (старения), следовательно, она имеет достаточно узкое применение и не может с высокой точностью описывать такие сферы деятельности, в которых присутствует цикличность. Например, птицеводство несовместимо с посевом зерновых, или же работа автомастерских никак не может быть связана с сервисами велосипедного обслуживания.

1. Материалы и методы исследования

Так как уравнение (3) не предусматривает сезонности износа, которая и обуславливает многостадийность, следует привести формальное математическое описание модели, которая учитывала бы данное явление. При этом очевидно, что в периоды смены стадий возможно либо понижение уровня износа, либо полное его отсутствие, если компоненты системы не изнашиваются. Рассмотрим моменты: $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ и $\tau_k < \tau_{k+1}$, для всех k

$= 0, 1, 2, \dots$ - моменты наступления периодов повышенного износа [10]. Промежутки с пониженным или нулевым износом назовем межсезоньем.

В каждый из моментов τ_k происходит повышение уровня износа, равное значению Δ_k , и предполагается, что в моменты τ_k устраняется часть накопленного износа со скоростью отладки γ_k . Следовательно, вместо (3) стоит рассматривать соотношение (4):

$$\mu_t = R + c_1 \cdot \exp\{\alpha \cdot t\} + c_2 \cdot \exp\{\beta \cdot (t - \tau_k)\} + \Delta_k \cdot \exp\{-\gamma_k \cdot (t - \tau_k)\}. \quad (4)$$

Первые два слагаемых представляют давление среды и неустраняемый износ: соответственно, они могут быть равны нулю, если в межсезонье подразумевается «консервация». Третье слагаемое – устраняемый износ, четвертое слагаемое – вносимый началом сезона рост интенсивности износа, устраняемый при отладке.

Для функции дожития решение определяется следующим образом:

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu_s ds\right\}. \quad (5)$$

Заметим, что модель (4)-(5) хоть и учитывает отладки, но продуктивная система при этом не восстанавливается, поэтому возникает вопрос: возможно ли представить такое описание модели износа и разрушения системы, которое учитывало бы частичные или полные восстановления, например, закупку нового оборудования на предприятии.

Рассмотрим стохастический базис $\mathbf{B} = (\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ (т.е. вероятностное пространство $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, снабженное неубывающим, непрерывным справа потоком σ -алгебр $\mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}$, пополненным по мере \mathbf{P} (см. [2-5] а также [15, 16] и литературу в них)), на котором определим продуктивный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ в случайной среде $E = \left\{ \{(\lambda_t(i))_{t \geq 0}\}_{i=1}^{K-1}; \{(\mu_t(i))_{t \geq 0}\}_{i=1}^K \right\}$ с регулярными траекториями из пространства Скорохода, заключающийся в выполнении некоторого конечного положительного и целого числа K операций, и значения процесса $X_t \in \{0, 1, \dots, K\}$ при $X_0 = K \in \{1, 2, \dots\}$. Для скачков процесса X предполагается, что $\Delta X_t \in \{-1, 0, 1\}$.

Процесс X представим следующим образом:

$$X_t = X_0 - B_t + A_t = K - B_t + A_t, \quad (6)$$

где $A_0 = B_0 = 0$. Процессы $A = (A_t)_{t \geq 0}$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ являются точечными, считающими количества положительных и отрицательных скачков, и равны -п.н:

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} I\{\Delta X_s = 1\}, \quad B_t = \sum_{0 < s \leq t} I\{\Delta X_s = -1\},$$

где $I\{\cdot\}$ - индикаторная функция, т.е. $I\{true\} = 1, I\{false\} = 0$.

В представлении (6) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ является процессом выполнения, $A = (A_t)_{t \geq 0}$ – процессом возвращений на доработку (см. [8, 9], [13], [15, 16]), при этом, в рамках описания модели износа, B можно рассматривать как разрушение продуктивной системы, A – как её восстановление.

Обозначим на \mathbf{B} марковский момент τ – момент достижения процессом X_t нулевого значения: $\tau = \inf \{t: t > 0: X_t = 0\}$, и будем считать, что $X_t = 0$ при всех $t \in (\tau, \infty)$, т.е. состояние $\{i = 0\}$ является поглощающим.

Отметим, что если $P\{\tau < \infty\} = 1$, то продуктивный процесс конечен, и τ является марковским моментом остановки на \mathbf{B} , поэтому, при всех $t \in (-\infty, \infty)$ определена функция распределения $F_\tau(t) = P\{\tau \leq t\}$. Поскольку $X_0 = K > 0$, то $F_\tau(0) = 0$ **P**-п.н.

Определение. X_t является процессом «точно-в-срок», или «точно-в-срок T» если существует такое $T > 0$, при котором выполняется:

$$P\{\tau \leq T\} = 1, \quad P\{\tau \geq T - \varepsilon\} > 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

или аналогично:

$$F_\tau(T) = 1, \quad F_\tau(T - \varepsilon) < 1 \text{ для любого } \varepsilon > 0. \quad (7)$$

При анализе марковских моментов зачастую полезно рассматривать процессы с одним скачком, поскольку именно на их основе сформулированы модели завершаемых событий (смертности, разрушения) в биологии или демографии (см. например [10, 14]) а также при описании рисков как технических, так и продуктивных систем.

Определим на \mathbf{B} процесс с одним скачком $N = (N_t)_{t \geq 0}$:

$$N = I\{\tau \leq t\}$$

с $N_0 = 0$ и $N_\infty = 1$ **P**-п.н. Разложение Дуба-Мейера на базисе $\mathbf{B}^N = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ имеет вид:

$$N_t = \tilde{N}_t + m_t^N,$$

где m_t^N – мартингал на \mathbf{B}^N и $\tilde{N} = (\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ – компенсатор в виде:

$$\tilde{N}_t = \int_0^t h_s \cdot I\{s < \tau\} ds,$$

и интенсивность скачков h_t процессов N определяется по теореме Деллашери (см. [2, 4]) следующими выражениями:

$$h_t = \frac{dF_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)}, \quad \int_0^t h_s ds = -\ln(1 - F_\tau(t)).$$

Соответственно, в силу (7), получаем эквивалентное условие для систем «точно-в-срок T»:

$$\int_0^T h_s ds = \infty, \quad \int_0^t h_s ds < \infty \text{ для любого } t \in [0, T). \quad (8)$$

Для субмартингалов $A = (A_t)_{t \geq 0}$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ разложение Дуба-Мейера определяют компенсаторы со значениями:

$$\tilde{A}_t = \int_0^t \alpha_s \cdot I\{X_s < K\} ds, \quad \tilde{B}_t = \int_0^t \beta_s \cdot I\{X_s > 0\} ds, \quad (9)$$

с интенсивностями $\alpha_t \geq 0$ и $\beta_t > 0$, определяемыми случайной средой E:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^{K-1} \lambda_t(i) \cdot I\{X_t = i\}, \quad \beta_t = \sum_{i=1}^K \mu_t(i) \cdot I\{X_t = i\}.$$

В модели предполагается, что на интенсивность скачков процесса A наложены ограничения, то есть $\int_0^T \alpha_s ds < \infty$, поэтому, аналогично (8), для B можно привести следующую формулировку:

$$\int_0^T \beta_s ds = \infty, \quad \int_0^t \beta_s ds < \infty \text{ для любого } t \in [0, T]. \quad (10)$$

2. Постановка задачи и методы моделирования

Пусть в (6) $A_t = 0$ при всех $t \geq 0$. Тогда получаем модель выполнения операций в представлении разности $K \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ и точечного процесса B_t . При этом, как показано в [15], для простых процессов «точно-в-срок» существует представление:

$$X_t = K - \int_0^t \beta_s ds + m_t^X, \quad (11)$$

где интенсивность скачков β определяется в следующем виде:

$$\beta_t = X_t \cdot \frac{I\{t < T\}}{T - t}. \quad (12)$$

Очевидно, условие (7) в формулировке (10) соблюдается, но также отметим, что в действительности такого добиться невозможно, поскольку выполнение операций происходит с некоторым максимальным уровнем интенсивности. При этом данный уровень со временем может уменьшаться, например, в силу износа оборудования и его дальнейшего разрушения.

Обозначим интенсивность β соответственно:

$$\beta_t = X_t \cdot \min \left\{ \lambda; \frac{I\{t < T\}}{T - t} \right\}. \quad (13)$$

Здесь, λ – максимальный уровень интенсивности, при достижении которого выполнение операций происходит с постоянной скоростью и пропорционально X_t . При определении интенсивности вида (13) условие (7) может не соблюдаться и $P\{\tau \leq T\} \leq 1$, или $P\{X_T \geq 1\} \geq 0$, и, соответственно, чем меньше λ – тем дальше система от реализации плана «точно-в-срок». Задача управления системой состоит в том, чтобы найти такой оптимальный уровень λ^* , чтобы процесс X_t был «точно-в-срок T ». При решении, для наглядности стоит воспользоваться методами имитационного компьютерного моделирования.

В рассматриваемых случаях (12) и (13) моделирование осуществляется на основе инфинитезимальных соотношений для условных вероятностей скачков (при $\Delta \rightarrow 0$):

$$P\{X_{t+\Delta} - X_t = -1 | F_t\} = \beta_t \cdot \Delta + o(\Delta). \quad (14)$$

Решим задачу нахождения оптимального уровня интенсивности λ^* следующим образом:

$$P\{X_T \geq 1\} = P\{\tau > T\} = 1 - P\{\tau \leq T\} = 1 - F_\tau(T) \rightarrow \min, \quad (15)$$

где $F_\tau(T)$ – функция распределения марковского момента остановки τ в точке T .

По закону больших чисел: $\mu/N \rightarrow P\{\cdot\}$ при $N \rightarrow \infty$, где μ – число событий, удовлетворяющих условию, N – общее число событий (генераций траекторий), $P\{\cdot\}$ – вероятность события. Следовательно:

$$F_\tau^*(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{\tau_i \leq T\} \rightarrow F_\tau(T), \quad N \rightarrow \infty \quad (16)$$

где $F_t^*(T)$ – эмпирическая функция распределения в точке T . Подставив (16) в (15), получаем эмпирическое решение.

Во всех случаях были приняты следующие параметры: $X_0 = K = 1000$, $T = 5$. Эмпирическая функция распределения при определении интенсивности (12) представлена графически на рис.1, и очевидно условие (7) соблюдается.

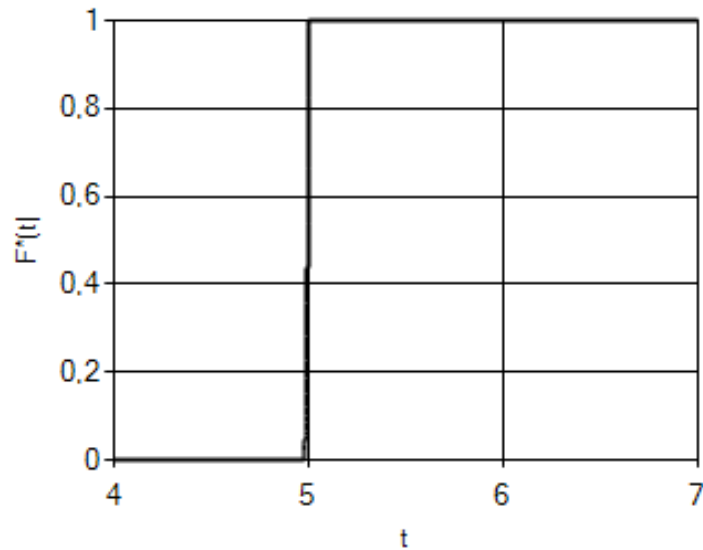


Рис.1 Эмпирическая функция распределения при интенсивности вида (12).

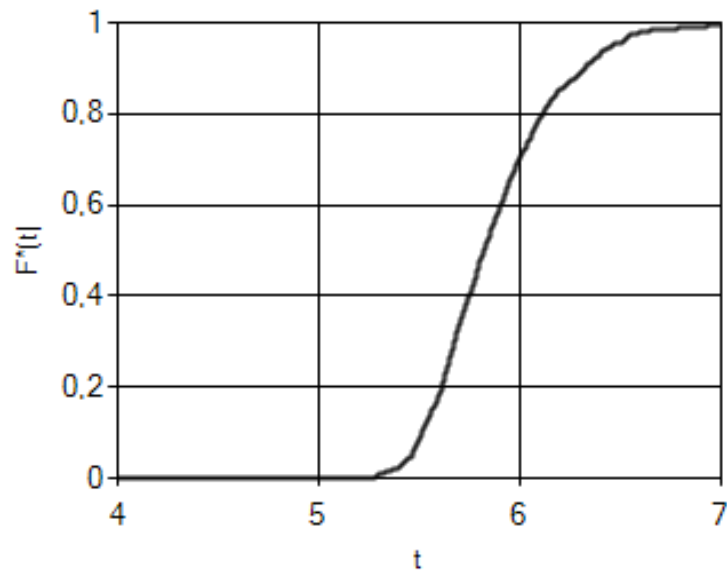


Рис.2 Эмпирическая функция распределения при интенсивности вида (13), $\lambda = 4$.

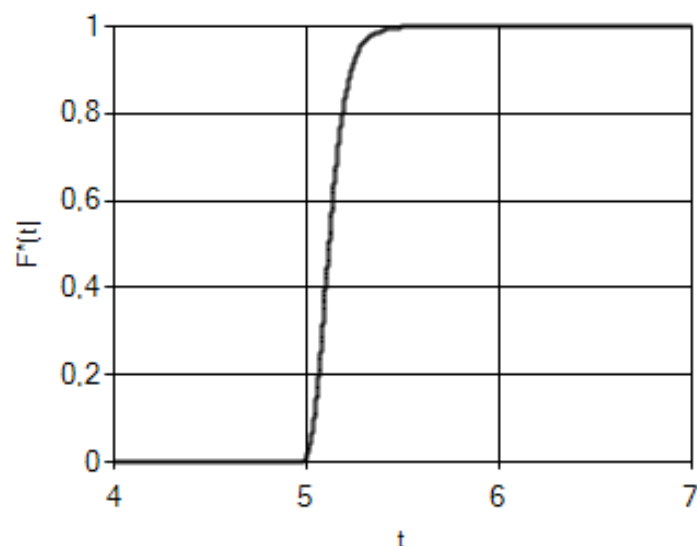


Рис.3 Эмпирическая функция распределения при интенсивности вида (13), $\lambda = 16$.

При моделировании интенсивности (13) был введен параметр $\lambda = 4$, результат проиллюстрирован на рис.2. Отметим, что данный случай может соответствовать продуктивной системе с высоким износом, так как моменты завершения наступают в позднее время.

Увеличивая λ , наблюдаем рост функции распределения и ее смещение к моменту времени T на рис.3, т.е. $P\{t \leq T\} \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$, что показывает возможность решения задачи эмпирически.

Заключение

Заметим, что модель износа и восстановления подразумевает случайность «ремонтов», но в действительности они часто производятся по строгому графику, следовательно, при соответствующем математическом описании необходимо учесть их детерминированность.

Представленные модели износа и разрушения продуктивных систем являются достаточно практичными с точки зрения математической формализации процессов, происходящих в реальных условиях. Описания даны в терминах функции дожития и компенсаторов случайных процессов и позволяют без труда проводить алгоритмизацию для задач имитационного компьютерного моделирования.

Список литературы

1. Бутов А.А. *Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: методическое пособие. Ч. 3.* Ульяновск: УлГУ, 2015.
2. Бутов А.А., Раводин К.О., *Теория случайных процессов: учебное пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2009.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов.* М.: Наука, 1986.

4. Деллашери К. *Емкости и случайные процессы*. М.: Мир, 1975.
5. Жакод Ж., Ширяев А.Н. *Предельные теоремы для случайных процессов. Том 1*. М.: Физматлит, 1994.
6. Кельтон В., Лоу А. *Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд.* СПб: Питер, 2004.
7. Кнут Д. *Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы*. Вильямс, 2019.
8. Бутов А.А. [и др.] Математическое моделирование основных классов стохастических продуктивных систем // *Инженерные технологии и системы*. 2019, т. 29, № 4, с. 496–509.
9. Бутов А.А., Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно-в-срок» // *Автоматика и телемеханика*, 2020, №3, с. 14–27
10. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 9-2, с. 219-222.
11. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. Математическая модель изменений в компенсации износа при старении // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2018, № 4, с. 14-17.
12. Бутов А.А., Коваленко А.А., Шабалин А.С. *Обзор математических моделей процессов многостадийного старения* // *Естественные и технические науки*. 2015, № 7 (85), с. 84-87.
13. Коваленко А.А. Модели стохастических продуктивных систем: критерий процессов размножения и гибели «точно-в-срок» // *Южно-Сибирский научный вестник*. 2019, №2 (26), с. 145-149.
14. Бутов А.А., Самохвалов М.В. Математическая модель истощения хрящевой ткани в велосипедных тренировках // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн*. 2019, № 2, с. 20-23.
15. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2018, т. 22, №. 3, с. 518-531.
16. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of just-in-time systems and windows of vulnerability in terms of the processes of birth and death // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2019, v. 23, no. 3, p. 525–540.