Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 1, с. 25-31.

Поступила: 01.06.2020
Окончательный вариант: 13.06.2020

© УлГУ

УДК 519.218.5 + 004.9

Модель многомерной продуктивной системы «точно-в-срок»

Бутов А.А.*[*], *Шевалдов И.А.

[*] butov.a.a@gmail.com
УлГУ, Ульяновск, Россия

Настоящая работа посвящена модели многомерной продуктивной системы «точно-в-срок». Математическая модель описывается в терминах точечных процессов. В работе исследована многомерная модель системы «точно-в-срок». Проведено моделирование системы с использованием программного обеспечения Visual Studio 2017.

***Ключевые слова**: «точно-в-срок», продуктивная система, многомерная продуктивная система, модель, моделирование.*

Введение

В этой работе основное внимание уделено таким, достаточно новым для производства (а также обучения, лечения, программирования и др.) системам, как *точно-в-срок.*

Принцип организации процессов выполнения в системах *точно-в-срок* в настоящее время достаточно хорошо известен и используется во многих областях. Примеры включают в себя производственные системы *точно-в- срок,* зачастую сокращаемые в публикациях как *JIT* - just-in-time, педагогические стратегии обучения *точно-в-срок*, а также методы компиляции *точно-в- срок* в компьютерном программировании. Также следует отметить возникновение примыкающих к упомянутым методам процедуры лечения и тренировки *точно-в-срок.*

Заметим, что принцип *точно-в-срок* первоначально был разработан в автомобилестроении и хорошо известен как *Производственная система Toyota* или *kanban* - система. Этот принцип в настоящее время широко известен и, как отмечалось, используется в иных, далеких от производства, областях. В производственных системах методы *точно-в-срок* часто, как правило, рассматриваются в логистических задачах, и для их описания тогда используются детерминистические модели. Однако, методы логистики неприменимы в иных (отличных от первоначальных) областях применения, и, прежде всего, в управлении процессами разработки конструкторско-технологической документации. Также очевидно, что случайные события в таких системах и соответствующих процессах наблюдаются довольно часто (не только в новых областях применения, но и в транспортных, складских, производственных). Следовательно, формальное описание и моделирование систем *точно-в-срок* и *почти-точно-в-срок* представляет отдельный интерес ввиду их производственной актуальности, а также отсутствия соответствующих стохастических моделей.

Заметим, что в настоящее время математические, особенно стохастические модели для систем *точно-в-срок* недостаточно развиты. Такие модели необходимы для решения задач оптимального управления, что могло бы позволить *оптимизацию распределения* системных ресурсов и реализацию оптимального планирования достаточно произвольной стохастической системы *точно-в-срок.* Цель данной работы - представить подход к стохастическому описанию систем *точно-в-срок*, который был бы подходящим как для аналитических методов, так и для компьютерного моделирования. В математических моделях таких систем следует предполагать, что траектории процессов должны принимать заданные значения в фиксированное время.

Такое поведение процессов известно для «стохастических мостов» и стохастических процессов в обратном времени. Таким образом, следует рассмотреть модели систем с требованием *точно-в-срок* в терминах процессов с поведением траекторий, близких к стохастическим мостам (см. [1]). Модели также должны позволить исследовать возможные нарушения этого требования, которые неизбежны для реальных систем.

Обращение времени стохастических процессов изучалось на протяжении многих лет.

Отметим, что ряд работ, относящихся к исследованиям стохастических мостов (например, броуновского моста, Пуассоновского моста, также известного как мост Пуассона) (см. [1]), посвящен исследованиям именно этих процессов. Кроме того, некоторые работы по обратимым Марковским процессам (см. [1-3]) примыкают к описанию процессов в обратном времени.

В работе изучаются модели простых систем *точно-в-срок*, а также многомерной системы в семимартингальных терминах для точечных процессов, аналогично упомянутому выше Пуассоновскому мосту. Здесь же допускаются некоторые предположения о процессах, присущих реальным системам.

1. Математическая модель

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, снабженное неубывающим непрерывным справа семейством σ-алгебр $\mathrm{F} = (\mathcal{F}_t)_{t>0}$, замкнутый относительно P.

На стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{F} = (\mathcal{F}_t)_{t>0}, P)$ (см. [4]) процесс $X = (X_t)_{t>0}$ – точечный процесс с траекториями в пространстве Скорохода, $\mathrm{X_t} \in \mathrm{N_0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1{,}0\}$.

Процесс X может быть представлен в виде разности (см. [4]):

$$X = X_0 - N = K - N,$$

где $N = (N_t)_{t>0}$– убывающий считающий процесс (число отрицательных скачков процесса X), с начальным значением $X_0 = K > 0, N_0 = 0$ и $X_t = K - N_t$, для любого t>0.

Предполагается, что субмартингал N и субмартингал X на B допускает разложение Дуба-Мейера (см. [1-4]):

$$\mathrm{N_t} = \widetilde{N}_{\mathrm{t}} + m_t^N,\ X_t = \tilde{X}_t - m_t^N \tag{1}$$

с компенсаторами $\widetilde{\mathrm{N}} = \left(\widetilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t\geq o}}$ $\widetilde{\mathrm{X}} = \left(\widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t\geq o}}$, и $\mathrm{m^N} = (\mathrm{m_t^N})_{\mathrm{t\geq 0}}$ - квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой (см. [5]):

$$< m^N >_{\mathrm{t}} = \widetilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{t}}$$

для любого t>0.

Также предполагается, что

$$\widetilde{N}_{\mathrm{t}} = \int_0^t (\mathrm{k} - \mathrm{N_S}) \cdot \frac{1}{\mathrm{T-s}} \cdot \mathrm{I}\{\mathrm{s} < t\}\, ds \tag{2}$$

где I{·} – индикаторная функция.

Из (1) и (2) следует, что процесс имеет разложение:

$$\mathrm{X_t} = \mathrm{K} - \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{X_S} \cdot \frac{1}{\mathrm{T-S}} \cdot \mathrm{I}\{\mathrm{s} < t\}\, \mathrm{ds} - \mathrm{m_t^N} \tag{3}$$

В общем случае, для базовой модели предполагается, что точечный процесс X допускает представление (см. [4,5]):

$$\mathrm{X_t} = \mathrm{K} - \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{h}_s\, \mathrm{ds} + \mathrm{m_t^x} \tag{4}$$

с интенсивностью убывающих скачков $h = h(X) = \left(h_t(X)\right)_{t>0}$ и мартингал $m^X = (m_t^X)_{t>0}$.

В частном случае (3) выполняется следующее равенство:

$$\mathrm{h_t} = \mathrm{h_t(X)} = \mathrm{X_t} \cdot \mathrm{I}\{\mathrm{s} < t\}/(\mathrm{T-s}), \tag{5}$$

и $m^X = -m^N$, т.е. $m_t^X = -m_t^N$, для любого $t > 0$.

Компенсатор точечного процесса, определяемого формулой (2), соответствует мосту Пуассоновского процесса. Следует, в связи с этим (в порядке значимости методов представления процессов в обратном времени и процессов - мостов) отметить фундаментальные результаты, приведенные в основополагающих работах для метода обращения времени у случайных процессов.

Рассмотрим стандартный пуассоновский процесс $\pi = (\pi_s)_{s\in[O;T]}$ на стохастическом базисе B с начальным значением $n_O = 0$ и с любой положительной интенсивностью $X > 0$.

Пусть $F_t^0 = \sigma\{\pi : T - t \leq s \leq T\}$ для $t \in [0,T]$, $F_t^0 = F_T^0$ для $t > T$, и пусть при этом неубывающее семейство σ - алгебр $\mathrm{F} = (F_t)_{t>0}$, является непрерывным справа пополнением $(F_t^0)_{t>0}$.

Определим супермартингал в обратном времени $\mathrm{Y} = (Y_t)_{t>0}$, как $Y = \pi_{T-t}$ для $t \in [0,T]$ и $Y_t = \pi_0 = 0$ для $t > T$.

Тогда Y является F-согласованным, и он имеет разложение:

$$Y_t = \pi_T - \int_0^t \frac{Y_S}{T-S} \cdot I\{s < t\}\, ds + m_t^Y, \tag{6}$$

где $m^Y = (m_t^Y)_{t>0}$ - локально квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой (см. [5])

$$\langle m^Y \rangle_t = \int_0^t \frac{Y_s}{T-s} \cdot I\{s < t\}\, ds.$$

Сравнение моделей (3) и (6) иллюстрирует факт, известный для процессов, являющихся «стохастическими мостами»: представление процесса $X = K - B$ (с начальным значением K и пуассоновским мостом N) совпадает с представлением в обратном времени Y пуассоновского процесса π (с произвольной строго положительной интенсивностью λ) при начальном значении $Y_0 = \pi_T = K$.

Таким образом, мы можем рассматривать поведение траекторий процесса X с $X_0 = K$ и $X_t = 0$ для $t > T$ в качестве воплощения требования *точно- в-срок.* Поэтому основной идеей представленного описания систем *точно-в- срок* является реализация соответствующего поведения траекторий с помощью соответствующего управления $h = (h)_{t>0}$ являющегося интенсивностью отрицательных скачков X в базовой модели (4). Эта интенсивность может рассматриваться как отрицательная обратная связь, стремящаяся к -∞ при $t \to T$ в случае ненулевых значений X_t. Заметим, что в (6) эта интенсивность напрямую не зависит от параметра λ производящего процесса π.

Распределение основного процесса X в (4) определяется интенсивностью отрицательных скачков h, которая в частном случае (5) зависит от значений K и $T > 0$. Наряду с X мы определяем для базовой модели (4) вспомогательные функции, обозначающие EX_t, EX_t^2 и $E(X_t - R_t)^2 = G_t - R_t^2$ (т.е. среднее значение, второй момент и дисперсию X, соответственно). Для функционала $h = h(X)$ общего вида в (4) и начального значения величины K предполагается, что

$$R_t = R_t(K;h) = EX_t, \quad G_t = G_t(K;h) = EX_t^2 \quad \text{и} \quad V_t = V_t(K;h) = E(X_t - R_t)^2. \tag{7}$$

В частном случае (5) эти функции зависят только от значений t, K, и T. Поэтому для (11) используются обозначения:

$$r_t(K,T) = R_t = E(X_t | X_0 = K; X_T = 0) \tag{8}$$

$$g_t(K,T) = G_t = E(X_t^2 | X_0 = K; X_T = 0) \tag{9}$$

$$v_t(K,T) = V_t = E\{(X_t - {R_t}^2) \big| X_0 = K; X_T = 0\} = \left(g_t(K,T) - r_t(K,T)\right)^2 \tag{10}$$

2. Многомерная система «точно-в-срок» и её моделирование

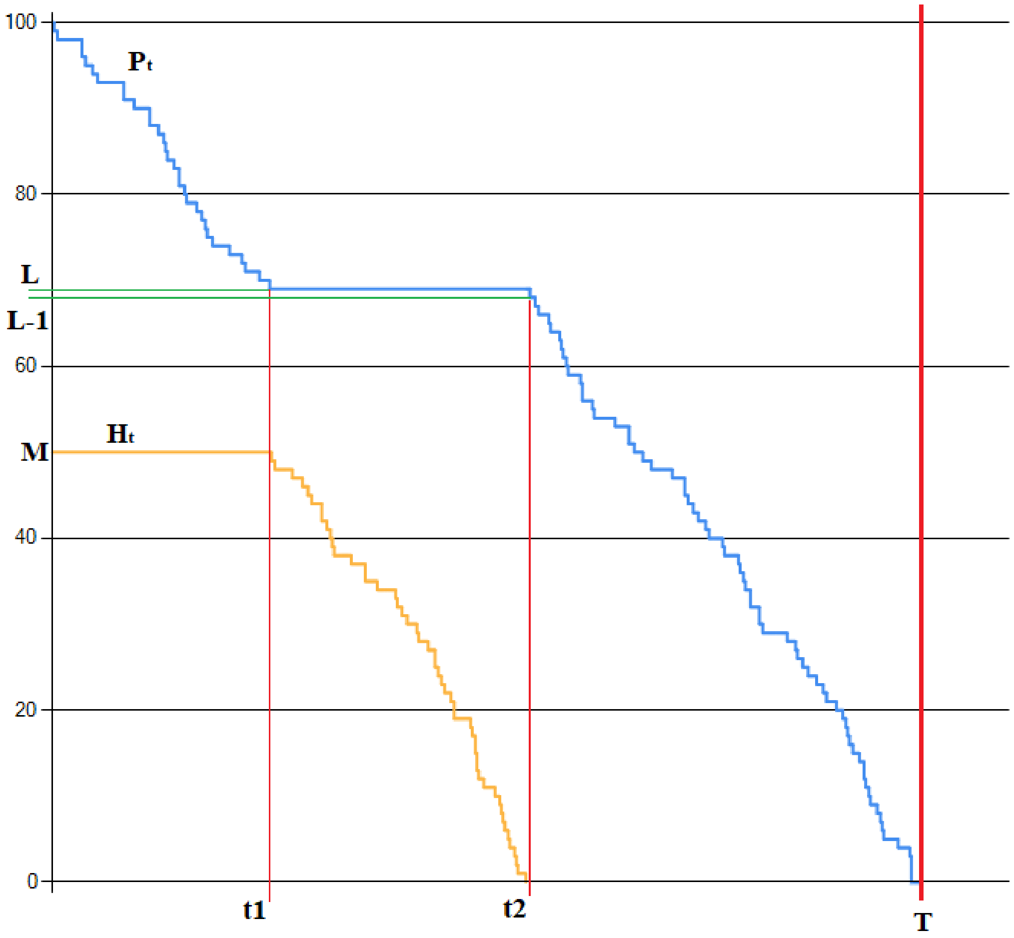

Рис. 1. Модель многомерной продуктивной системы «точно-в-срок»

На рис. 1 изображены траектории многомерной системы «точно-в-срок», где процесс P_t – основной процесс, а H_t – дочерний. Таким образом P_t зависит от H_t.

Математическая модель основного и дочернего процесса описана в разделе 1.

Значение процесса H_t до времени t1 (начало процесса H_t) равно M:

$$H_t = M, \text{при } t \leq t1 \quad (11)$$

После времени $t1$ процесс H_t продолжает свое выполнение по математической модели (согласно разделу 1).

Момент перехода основного процесса P_t из уровня L в уровень $L-1$осуществляется путем достижения процессом H_t уровня 0 и этот момент на рисунке 1 показан отметкой $t2$.

Таким образом основной процесс «ожидает» момента достижения дочернего процесса нулевого значения и остается на уровне L. После достижения дочернего процесса нулевого значения после процесс продолжает свое построение.

Практическим примером многомерного процесса «точно-в-срок» может являться выполнение работы, которая разделяется на несколько шагов и без выполнения дополнительной работы основная работа не может продолжаться.

Например, сборка автомобиля. Сборка автомобиля – основной процесс, а дочерними могут являться изготовление той или иной детали, которой на текущий момент нет.

Рис. 2. Входные параметры для моделирования траекторий

На рис. 2 представлены входные параметры для моделирования траекторий процессов. В качестве примера укажем к основному процессу 2 дочерних процесса.

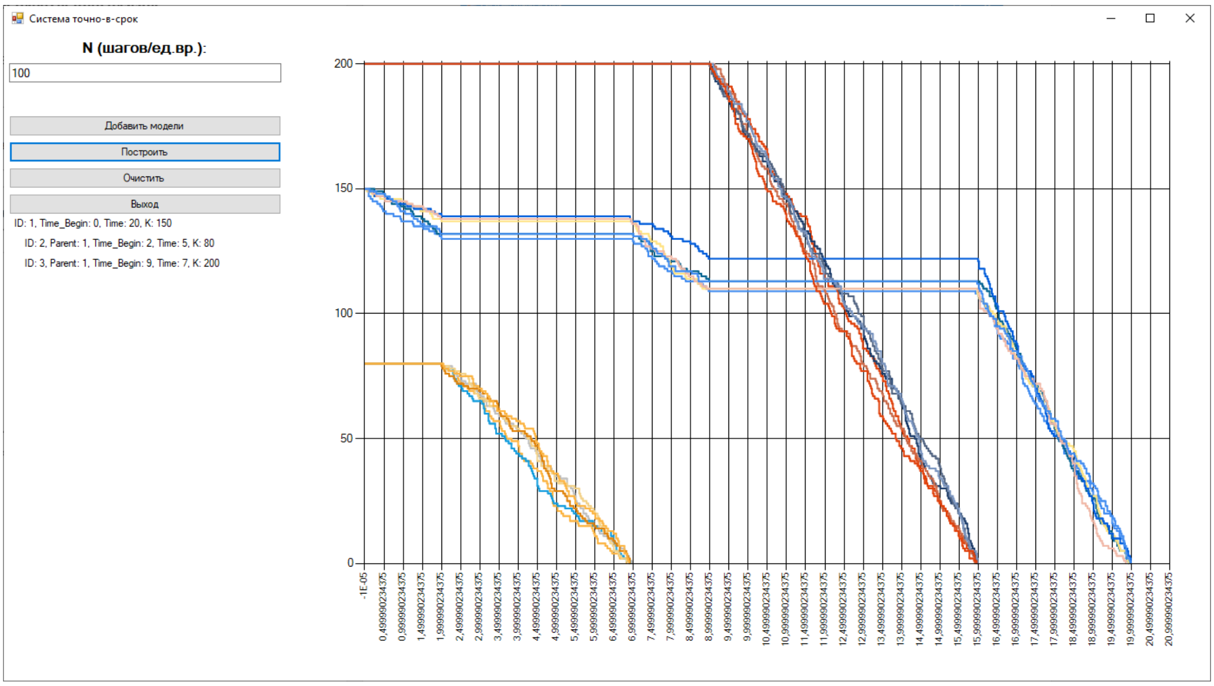

Рис. 3. Результат работы программы

На рис. 3 представлен результат работы программы - совокупность траекторий процессов.

Как видно из графика, все траектории дошли до уровня 0 точно в срок.

Заключение

В данной работе была построена компьютерная модель многомерной продуктивной системы в терминах точечных процессов, даны основные определения понятий, участвующих в формировании модели.

Для систем последовательного выполнения операций без возвращений подробно рассмотрен случай однородных процессов, позволяющий исследовать системы «точно-в-срок». Показан основной метод исследования – рассмотрение случайных процессов в обратном времени.

Аналитическое рассмотрение и компьютерное моделирование систем «точно-в-срок» востребовано. В работе рассмотрена достаточно общая модель, основанная на теории случайных блужданиях в случайной среде, что представляет собой определенно достаточно общую и перспективную схему.

Список литературы

1. Бородин А.Н. *Случайные процессы: Учебник.* Спб.: Изд-во «Лань», 2013.
2. Бутов, А.А. *Теория случайных процессов* : *учеб. пособие* / А.А. Бутов, К.О. Раводин. Ульяновск: УлГУ, 2009. 62 с.
3. Бутов, А.А. *Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 1. Введение в стохастическое исчисление.* Ульяновск : УлГУ, 2016. – 48 с.
4. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // *Вестник Самарского государственного технического университета*. *Серия: Физико-математические науки.* 2018, т. 22, №. 3, с. 518-531.
5. Бутов А.А. Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно в срок» // *Автомат. и телемех.* 2020, № 3, с.14–27.