Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 1, с. 32-38.

Поступила: 22.05.2020
Окончательный вариант: 22.05.2020

УДК 519.216.2

Математическая модель оптимального управления эпизодически наблюдаемым процессом

Гаврилова М.С.

pm@ulsu.ru
УлГУ, Ульяновск, Россия

В статье рассматривается математический метод решения задачи о поиске оптимальной интенсивности наблюдений за эпизодически наблюдаемым процессом. В основе предложенного метода лежит применение теории мартингалов. Доказана теорема об оптимальном значении интенсивности пуассоновского процесса в задаче минимизации целевого функционала. Полученные результаты можно использовать в различных областях науки, в том числе в биологии и медицине.

***Ключевые слова**: случайный процесс, наблюдения, пуассоновский процесс, интенсивность, оптимизация, формула Ито, мартингал*

Введение

Поиск оптимальной интенсивности наблюдений за различными эпизодически наблюдаемыми процессами является актуальной научной задачей. Ее решению посвящены как более ранние работы [8], так и современные [6, 7]. Суть задачи состоит в следующем. Есть некоторый эпизодически наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, наблюдения за которым осуществляются в моменты скачков произвольного точечного процесса $N = (N_t)_{t \geq 0}$. В качестве N может рассматриваться пуассоновский процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ с постоянной интенсивностью $\lambda > 0$. Если наблюдения за процессом X происходят с малой интенсивностью, полученных значений может быть недостаточно для его достоверного анализа. Как известно, чем больше информации об эпизодически наблюдаемом процессе мы знаем, тем точнее будут результаты проводимого исследования. Однако часто сам процесс наблюдения за X оказывается дорогостоящим, или трудноосуществимым, или имеет ограничения по частоте наблюдений (например, частое облучение наносит вред здоровью пациента). В связи с этим, необходимо вычислить оптимальную интенсивность наблюдений за процессом *X* для достижения компромисса между точностью производимых измерений и их "стоимостью". В настоящей работе предложено решение одной из таких оптимизационных задач с применением мартингальных методов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим на стохастическом базисе $\mathrm{B} = \left(\Omega, \mathrm{F}, \Im = \left(\Im_t\right)_{t \ge 0}, \mathrm{P}\right)$ наблюдаемый эпизодически процесс $X = \left(X_t\right)_{t \ge 0}$ с непрерывными траекториями

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \tag{1}$$

где $W = \left(W_t\right)_{t \ge 0}$ – стандартный винеровский процесс, параметры μ и σ отличны от нуля.

Предположим, что наблюдения за процессом *X* осуществляются в моменты скачков пуассоновского процесса $\pi = \left(\pi_t\right)_{t \ge 0}$ с постоянной интенсивностью $\lambda > 0$.

Тогда процесс наблюдений $Y = \left(Y_t\right)_{t \ge 0}$ является скачкообразным процессом с траекториями

$$Y_t = \int_0^t \left(X_s - Y_{s-}\right) d\pi_s \tag{2}$$

Среднеквадратичная интегральная ошибка наблюдений за процессом *X* до момента $T > 0$ вычисляется по формуле:

$$q_T = E\int_0^T \left(X_t - Y_t\right)^2 dt \tag{3}$$

В настоящей работе ставится задача определения оптимальной интенсивности наблюдений за процессом *X*. Под оптимальной интенсивностью наблюдений понимается такая интенсивность пуассоновского процесса $\lambda = \lambda^*$, при которой функционал потерь

$$\Phi(T;\lambda) = a q_T + b\lambda T \tag{4}$$

достигает своего минимума.

В уравнении (4) величина $a > 0$ – "цена" ошибки наблюдений, $b > 0$ – "стоимость" наблюдений до момента T .

Следовательно, для определения оптимальной интенсивности наблюдений за процессом *X* необходимо минимизировать целевой функционал (4) по параметру λ, при условии $\lambda > 0$.

Следующий пункт посвящен решению поставленной задачи.

2. Решение задачи оптимального управления эпизодически наблюдаемым процессом

Теорема. *Оптимальное значение интенсивности пуассоновского процесса λ^* в задаче минимизации целевого функционала (4) по параметру λ является положительным решением уравнения*

$$A\lambda^4 - B\lambda^2 + C\lambda + D - \left(D + F\lambda + H\lambda^2\right)e^{-\lambda T} = 0 \tag{5}$$

с коэффициентами $A = bT$, $B = a\sigma^2 T$, $C = 2a\sigma^2 - 4a\mu^2 T$, $D = 12a\mu^2$, $F = 8a\mu^2 T + 2a\sigma^2$ *и* $H = 2a\mu^2 T^2 + a\sigma^2 T$.

Доказательство.

Оптимальная интенсивность пуассоновского процесса $\lambda = \lambda^*$ является решением уравнения

$$a\left(\frac{\partial q_T(T;\lambda)}{\partial\lambda}\right) + bT = 0 \tag{6}$$

Подставим в (6) выражение (3). Траектории процесса X не зависят от интенсивности λ, следовательно,

$$a\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(E\int_0^T\left(Y_t^2 - 2X_tY_t\right)dt\right) + bT = 0 \tag{7}$$

По теореме Фубини [5] уравнение (7) принимает вид

$$a\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_0^T\left(EY_t^2 - 2EX_tY_t\right)dt\right) + bT = 0 \tag{8}$$

Найдем EY_t^2 и EX_tY_t.

По формуле Ито [4] для скачкообразного процесса Y_t^2 справедливо разложение

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_{s-}dY_s + \sum_{0<s\le t}\left(\Delta Y_s\right)^2 \tag{9}$$

с начальным значением $Y_0 = 0$.

Согласно (2),

$$\int_0^t Y_{s-}dY_s = \int_0^t\left(X_sY_{s-} - Y_{s-}^2\right)d\pi_s \tag{10}$$

Сумма квадратов приращений процесса Y в полуинтервале $(0;t]$

$$\sum_{0<s\le t}\left(\Delta Y_s\right)^2 = \sum_{0<s\le t}\left(X_s - Y_{s-}\right)^2\Delta\pi_s = \int_0^t\left(X_s - Y_{s-}\right)^2 d\pi_s \tag{11}$$

Подставим (10)–(11) в разложение (9), получим уравнение

$$Y_t^2 = \int_0^t \left(X_s^2 - Y_{s-}^2\right) d\pi_s \qquad (12)$$

По теореме Дуба-Мейера [4]

$$\pi_t = \lambda t + m_t, \qquad (13)$$

где процесс $m = (m_t)_{t \geq 0}$ – скачкообразный мартингал с $m_0 = 0$, $Em_t = 0$ и $Dm_t = \lambda t$.

Подставим (13) в (12), получим разложение

$$Y_t^2 = \int_0^t \lambda\left(X_s^2 - Y_{s-}^2\right) ds + \int_0^t \left(X_s^2 - Y_{s-}^2\right) dm_s \qquad (14)$$

Стохастический интеграл по мартингалу

$$\int_0^t \left(X_s^2 - Y_{s-}^2\right) dm_s$$

является мартингалом [4]. По теореме об остановленном мартингале [1]

$$E\int_0^t \left(X_s^2 - Y_{s-}^2\right) dm_s = 0 \qquad (15)$$

Из теоремы Фубини [5] и (14)–(15) следует уравнение

$$EY_t^2 = \int_0^t \lambda\left(EX_s^2 - EY_{s-}^2\right) ds,$$

решением которого является

$$EY_t^2 = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \lambda EX_s^2 ds \qquad (16)$$

По формуле Ито [4]

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \langle \sigma W \rangle_t \qquad (17)$$

с начальным значением $X_0 = 0$.

После подстановки (1) в (17), получим разложение

$$X_t^2 = 2\int_0^t \left(\mu^2 s + \mu\sigma W_s\right) ds + 2\int_0^t \left(\sigma\mu s + \sigma^2 W_s\right) dW_s + \sigma^2 t,$$

из которого следует, что

$$EX_t^2 = \mu^2 t^2 + \sigma^2 t \qquad (18)$$

Подставив (18) в (16), получим

$$EY_t^2 = \mu^2 t^2 + \left(\sigma^2 - \frac{2\mu^2}{\lambda}\right) t + \left(\frac{2\mu^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \qquad (19)$$

Аналогично рассуждениям, изложенным выше, найдем $EX_t Y_t$.

По формуле Ито [4]

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s \qquad (20)$$

Подставив (1)–(2) в (20), получим разложение

$$X_tY_t = \int_0^t \left(\lambda X_s^2 + \mu Y_s - \lambda X_s Y_{s-}\right) ds + \int_0^t \left(X_s^2 - X_s Y_{s-}\right) dm_s + \int_0^t \sigma Y_s dW_s ,$$

из которого следует, что

$$EX_tY_t = \int_0^t \left(\lambda EX_s^2 + \mu EY_s - \lambda EX_s Y_{s-}\right) ds$$

или

$$EX_tY_t = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \left(\lambda EX_s^2 + \mu EY_s\right) ds \qquad (21)$$

Из (2) следует уравнение

$$EY_t = \int_0^t \lambda \left(EX_s - EY_{s-}\right) ds ,$$

решением которого является интеграл

$$EY_t = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \lambda \mu s ds ,$$

равный

$$EY_t = \mu t + \frac{\mu}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} - 1\right) \qquad (22)$$

Подставим (18) и (22) в (21), получим решение:

$$EX_tY_t = \mu^2 t^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right) t - \frac{\sigma^2}{\lambda} + \left(\frac{\mu^2 t + \sigma^2}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \qquad (23)$$

Далее подставим (19) и (23) в (8), получим уравнение по переменной $\lambda > 0$:

$$\frac{12a\mu^2}{\lambda^4} + \frac{2a\sigma^2 - 4a\mu^2 T}{\lambda^3} - \frac{a\sigma^2 T}{\lambda^2} - \left(\frac{12a\mu^2}{\lambda^4} + \frac{8a\mu^2 T + 2a\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{2a\mu^2 T^2 + a\sigma^2 T}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda T} + bT = 0$$

или

$$A\lambda^4 - B\lambda^2 + C\lambda + D - \left(D + F\lambda + H\lambda^2\right) e^{-\lambda T} = 0$$

с коэффициентами $A = bT$, $B = a\sigma^2 T$, $C = 2a\sigma^2 - 4a\mu^2 T$, $D = 12a\mu^2$, $F = 8a\mu^2 T + 2a\sigma^2$ и $H = 2a\mu^2 T^2 + a\sigma^2 T$.

Теорема доказана.

3. Обсуждение полученных результатов

В силу сложности функции в левой части уравнения (5), найти его аналитическое решение в общем виде не представляется возможным. В связи с этим, для поиска приближения к точному решению (5) целесообразно воспользоваться численными (например, см. Главу 2 в [2]) или другими методами приближенного решения.

Автором статьи была предпринята попытка упростить уравнение (5) с целью получить приближенное аналитическое решение для λ^*.

По правилу Лопиталя,

$$\lim_{T\to+\infty}\left(D+F\lambda+H\lambda^2\right)e^{-\lambda T}=0,$$

откуда при “больших” значениях параметра T (порядка 10, 100 и т.д.) следует приближение

$$\left(D+F\lambda+H\lambda^2\right)e^{-\lambda T}\approx 0$$

В этом случае вместо (5) рассмотрим линейное алгебраическое уравнение 4-го порядка:

$$A\lambda^4-B\lambda^2+C\lambda+D=0 \tag{24}$$

В “Справочнике по математике для научных работников и инженеров” [3] предложено два аналитических метода решения уравнений вида (24) – методы Декарта-Эйлера и Феррари. Эти методы сводятся к поиску корней достаточно громоздких алгебраических уравнений, решить которые в общем виде затруднительно. Таким образом, для (24) также следует использовать численные и другие методы приближенного решения.

Заключение

Главной целью настоящей работы является определение оптимальной интенсивности наблюдений за эпизодически наблюдаемым процессом с непрерывными траекториями. Эта цель была достигнута решением задачи минимизации целевого функционала (4) мартингальными методами. Была доказана теорема об оптимальной интенсивности пуассоновского процесса λ^*. В силу сложности полученного уравнения (5), найти его аналитическое решение не представляется возможным. В связи с этим, целесообразно воспользоваться численными или другими приближенными методами решения.

Список литературы

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 408 с.
2. Зализняк В.Е. Численные методы. *Основы научных вычислений: учебник и практикум для академического бакалавриата*. 2-е издание, перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2019. 356 с. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://biblio-online.ru/bcode/431899.

3. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* М.: Наука, 2003. 832 с. URL: https://bookre.org/reader?file=473099.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов*. М.: Наука, 1986. 512 с.
5. Лоэв М. *Теория вероятностей: учебник*; пер. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 720 с.
6. Adès M. Stochastic optimal control under Poisson-distributed observations / M. Adès, P.E. Caines, R.P. Malhamé // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000, v. 45, № 1. ISSN 0018-9286. – DOI: https://doi.org/10.1109/9.827351.
7. Butov A.A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death process // *Statistics and Probability Letters*. 2015, v.101, p. 49–53. ISSN 0167-7152. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021.
8. Puliafito, P.P. Optimization of costly measurements in stochastic decision processes / P.P. Puliafito, R. Zoppoli // *Zeitschrift für Operations Research*. 1973, v.17, p.129–142. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01956857.