Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 1, с. 103-108.

Поступила: 28.05.2020
Окончательный вариант: 05.06.2020

УДК 519.218.5

Модель обслуживания парка оборудования с возможной задержкой в начале ремонта

Савинов Ю.Г. [*]***, Сафиуллов И.Д., Дуняшина М.С.***

[*] uras@aport.ru
УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена математическая и компьютерная модель СМО с ограниченным источником заявок и возможной случайной задержкой в начале обслуживания. Математическая модель построена в терминах точечных процессов и их компенсаторов. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова*: система массового обслуживания, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование.*

Введение

Рассмотренная в работе теоретическая модель, в первом приближении, может описывать организацию, в которой есть фиксированный парк техники (например, принтеров, компьютеров). Эта техника по мере выхода из строя отправляется на ремонт и возвращается из ремонта. Причем для некоторых изделий не требуется для ремонта заказывать детали, и они сразу (при условии наличия свободных ремонтников) начинают ремонтироваться. Для других - нет деталей для ремонта, и для их заказа и получения требуется некоторое случайное время. Такого рода задачи с ограниченных источником заявок были впервые рассмотрены Пальмом [1].

В отличие от модели Пальма, предложенная в работе система массового обслуживания (СМО) является немарковской, из-за введения задержек в начале обслуживания для части заявок. Аналитическое исследование СМО с задержками сильно затруднено (см., например, [2-5]), требуется использование продвинутого математического аппарата (например, введения функции Миттаг-Леффлера или вырожденной гипергеометрической функции Куммера), а результаты, полученные этими методами, не подходят для имитации, поскольку часто содержат суммы бесконечных рядов.

Поэтому основным способом исследования выбрано имитационное моделирование. Для имитационного моделирования наиболее подходит не марковское описание, а семимартингальное (траекторное) описание СМО (подробнее см. работы [6-11] и ссылки в них) в терминах точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [12]. В работе показано, что при семимартингальном описании сложность как математической, так и компьютерной модели практически не растет как с ростом емкости источника заявок, так и числа ремонтников.

1. Постановка задачи

Рассмотрим СМО с ограниченным источником заявок емкости $n > 0$ и задержкой в обслуживании для части заявок (см. рис.1).

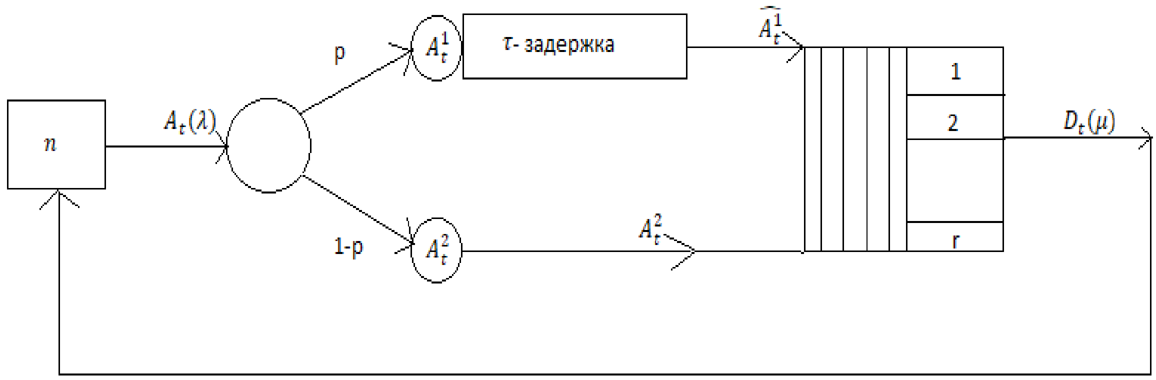

Рис.1. Схема СМО с ограниченным источником заявок и задержкой в обслуживании.

Пусть интенсивность поломки одного «принтера» равна $\lambda > 0$. Заявка на ремонт из источника заявок поступает в виртуальный роутер, и с вероятностью $p \geq 0$ распределяется в узел с задержкой (нет деталей для ремонта) и с вероятностью 1-$p \geq 0$ без задержки встает в очередь на ремонт. Задержка означает, что заявки отправляются на обслуживание в следующий узел не мгновенно, а со случайной задержкой $\tau \sim R[1; 2]$. Длительность ремонта одного «принтера» распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu > 0$. В узле ремонтников (их $r \geq 1$) организована общая неограниченная очередь [13-14], в которую поступают заявки из обоих потоков (потока с задержкой и без задержки). Дисциплина обслуживания - в порядке поступления: заявка, поступившая в систему, принимается на обслуживание, если есть хотя бы один свободный прибор. Если заявка застала свободными несколько приборов, то она направляется в один из них случайным образом [13]. После ремонт принтер (заявка) отправляется обратно в источник заявок.

2. Математическая модель

Введем считающие процессы [12]:

$A=(A_t)_{t\geq 0}$ - число «поломанных принтеров» за время $t\geq 0$;

$A^1=A_t^1$ – число «поломанных принтеров» за время t, для которых не было «деталей для ремонта в наличии»;

$\hat{A}^1=\hat{A}_t^1$ – число «принтеров» за время t, для которых пришлось заказывать и ждать «детали для ремонта», то есть $\hat{A}_t^1=A_{t+\tau}^1$;

$A^2=A_t^2$ – число «поломанных принтеров» за время t, для которых были «детали для ремонта в наличии»;

$D=(D_t)_{t\geq 0}$- число «отремонтированных принтеров» за время $t\geq 0$.

Пусть $\xi=(\xi_t)_{t\geq 0}$ – число «сломанных принтеров» в текущий момент времени $t\geq 0$. Тогда можно записать баланс, что

$$\xi_t=\xi_0+A_t-D_t,\ \xi_0\geq 0.$$

Пусть $\hat{\xi}=(\widehat{\xi_t})_{t\geq 0}$ – число «сломанных принтеров» в текущий момент времени $t\geq 0$, для которых есть «детали для ремонта». Тогда аналогично

$$\widehat{\xi_t}=\widehat{\xi_0}+\hat{A}_t^1+A_t^2-D_t,\quad \widehat{\xi_0}=\xi_0.$$

Для рассматриваемой в данной работе СМО $A=(A_t)_{t\geq 0}$ – точечный процесс с компенсатором [12]:

$$\widetilde{A_t}=\int_0^t (n-\xi_s)^+\cdot\lambda ds\,,\ \lambda>0, \tag{1}$$

где $(a)^+=\max(a,0)$, то есть мгновенная интенсивность определяется числом «несломанных принтеров» $(n-\xi_s)^+$, которые потенциально могут сломаться.

Логику работы «виртуального роутера», который с вероятностью $p\geq 0$ распределяет заявку в узел с задержкой (нет деталей для ремонта) и с вероятностью 1-$p\geq 0$ отправляет без задержки в очередь на ремонт можно описать следующим образом. Пусть $\eta\sim R[0;1]$ – генерируется в момент скачков A_t. Введем величины $r_s^i\epsilon\{0;1\}$ согласно (2):

$$r_{s\_}^1=I(dA_s=1)\cdot I(\eta\epsilon[0;p])\,,\ r_{s\_}^2=1-r_{s\_}^1, \tag{2}$$

где $I(\cdot)$ –индикаторная функция. Тогда для процессов A^1, A^2 запишем:

$$A_t^i=\int_0^t r_{s\_}^i\,dA_s, i=1{,}2\,;\ r_{s\_}^1+r_{s\_}^2=1,\ r_s^i\epsilon\{0;1\}, \tag{3}$$

то есть в момент скачка $(dA_s=1)$ с вероятностью $p\geq 0$ $r_{s\_}^1$ равно 1, и, соответственно скачок происходит у A^1, аналогично с вероятностью $1-p\geq 0$ $r_{s\_}^2$ равно 1, и, соответственно, скачок происходит у A^2.

Для процесса $\hat{A}_t^1$ можно написать следующую формулу:

$$\hat{A}_t^1 = \sum_{i=1}^{A_t^1} I(t > \tau_i + \sigma_i), \tag{4}$$

где $\tau_i \sim R[1;2]$ – задержка – генерируется в момент -го скачка A_t^1, $\sigma_i = inf\{t | A_t^1 = i\}$ – момент i-го скачка A_t^1. То есть в формуле (4) суммируются индикаторы, проверяющие условие, что для i-ой заявки «пришли детали для ремонта» по всем скачкам A_t^1.

Компенсатор для процесса $D = (D_t)_{t \geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D_t} = \int_0^t \mu \cdot \min(r, \widehat{\xi_s}) ds. \tag{5}$$

Здесь важно, что число «активно ремонтирующихся принтеров» $\min(r, \widehat{\xi_s})$ определяется не общим числом «сломанных принтеров» ξ_t, а $\widehat{\xi_t}$– числом «сломанных принтеров», для которых уже есть «детали для ремонта», а значит их можно ремонтировать.

Как видно из формул (1)-(5), математическая модель не усложняется с ростом n и r.

3. Итерационные формулы для компьютерного моделирования

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. Из формул (1)-(5) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения [12]:

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = \left(n - \xi_t\right)^+ \cdot \lambda \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{6}$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu \cdot \min(r, \widehat{\xi_t}) \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{7}$$

Введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $n \cdot \lambda \cdot \Delta \ll 1$, $\mu \cdot r \cdot \Delta \ll 1$, получим следующие итерационные формулы (8)-(10).

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda), \tag{8}$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta\left(\min(r, \widehat{\xi_t})\mu\right), \tag{9}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Заметим, что A^1, A^2 , $\hat{A}^1$, ξ, $\hat{\xi}$ – определяются алгебраическими уравнениями и не требуют итерационных формул.

4. Результаты компьютерного моделирования

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью программы, реализованной в среде Delphi 7 (см. рис. 2).

Компьютерные эксперименты показывают, что с ростом n и r растет время выполнения программы, поскольку для корректной имитации требуется выполнение условий $n \cdot \lambda \cdot \Delta \ll 1$, $\mu \cdot r \cdot \Delta \ll 1$, что при больших n и r приводит к необходимости пропорционального уменьшения шага дискретизации Δ. Но не требуется создания, добавления никаких новых компонентов в программу, то есть сложность компьютерной не усложняется с ростом n и r.

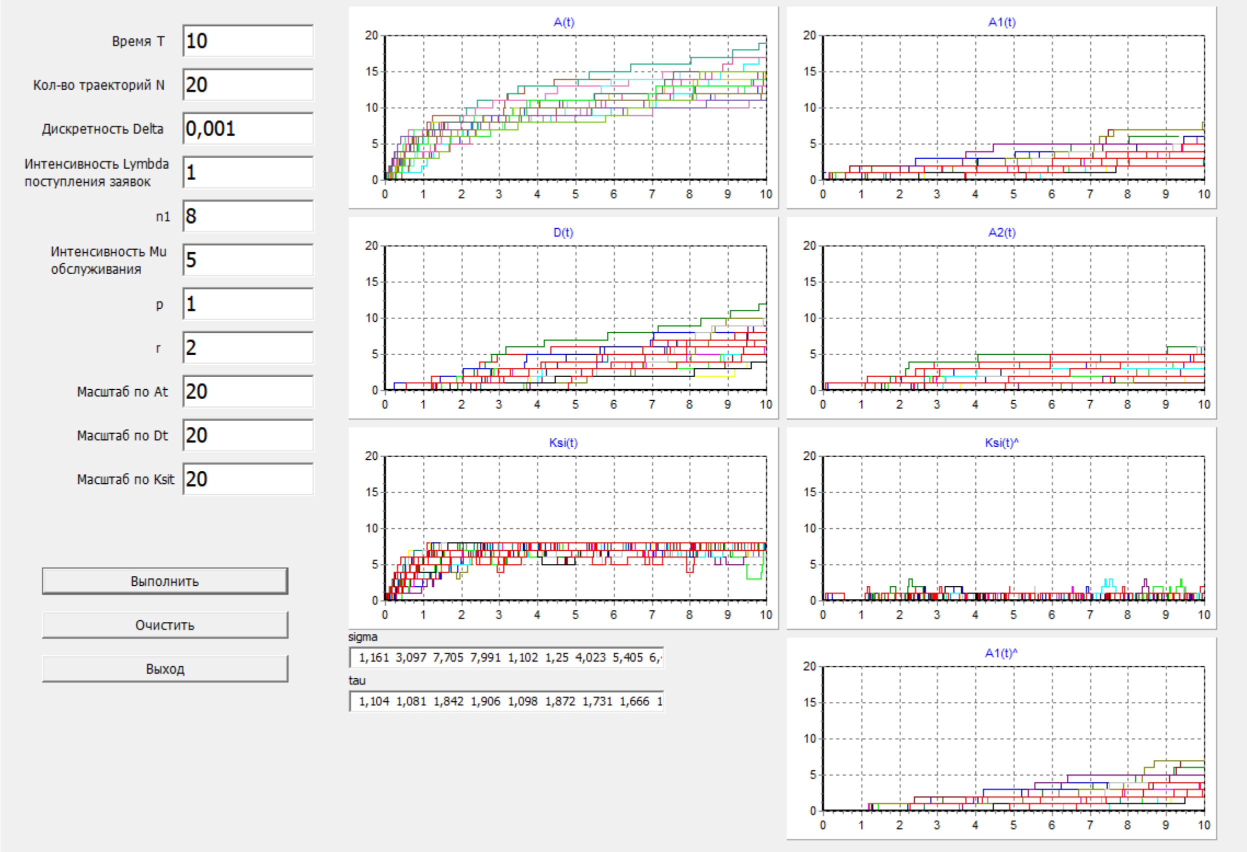

Рис.2. Диалоговое окно программы. Практическая реализация в среде Delphi.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. M.:URSS, 2013. 400 с.
2. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016, № 3(36), с. 60–65.
3. Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. *Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных.* Доклады ТУСУРа, № 2 (26), часть 2, декабрь 2012. 251с.
4. Ануфриев Д.П., Холодов А.Ю. *Статистический анализ имитационных экспериментов модели системы массового обслуживания с накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания.* Астраханский инженерно-строительный институт (ГАОУ АО ВПО «АИСИ»), 2014. 211 с.
5. Гаджиев А.Г., Мамедов Т.Ш. *Циклические системы с задержкой обслуживания*. Доклады Академии наук, 2009.

6. Столяров И.А., Табакова Е.Д., Савинов Ю.Г. Семимартингальная модель многоканальной СМО с ограниченным временем // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. В двух частях*. – Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич. 2018, часть 1, с. 502-506.
7. Савинов Ю. Г., Табакова Е.Д., Сафиуллов И.Д. Оптимизация в СМО с нетерпеливыми заявками // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн.* 2019, № 1, с. 92-98.
8. Столяров, И.А., Савинов Ю.Г. Семимартингальная модель СМО с динамическим приоритетом *// Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы III научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 24-25 апреля 2017 г. – Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич*. 2017, с. 553-557.
9. Бутов А.А., Галимов Л.А. Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах // *Современные проблемы науки и образования*. 2015, № 2, с. 758.
10. Бутов А.А., Галимов Л.А. Стохастическая имитационная модель оценки резерва произошедших, но не заявленных страховых убытков в терминах СМО // Фундаментальные исследования. 2016, № 8-2, с. 234-238.
11. Бутов А.А., Галимов Л.А. Оптимальное управление распределением заявок в многоканальной системе массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком поступления заявок и экспоненциальным временем обслуживания // Естественные и технические науки. 2014, № 9-10 (77), с. 244-247.
12. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2009.
13. Алиев Т.И. *Основы моделирования дискретных систем*. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
14. Бутов А.А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2007.