УЛЬЯНОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Ученые записки

ЭКОЛОГИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

КЛИНИЧЕСКАЯ МЕДИЦИНА

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

ФИЗИЧЕСКАЯ

МЕХАНИКИ

ГУМАНИТАРНЫЕ ... И СОЦИАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ОБРАЗОВАНИЕ

БИОЛОГИЯ И МЕДИЦИНА

ЛИНГВИСТИКА

ГОСУДАРСТВО И ПРАВО

Министерство образования Российской Федерации

Ульяновский государственный университет

Ученые записки Ульяновского государственного университета

Серия

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Выпуск 2(12)

Ульяновск 2002

ББК 22.1+ 22.2
У 51

*Печатается по решению Ученого совета
механико-математического факультета
Ульяновского государственного университета*

У 51 **Ученые записки Ульяновского государственного университета.** Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». Вып. 2(12)/ Под ред члена РАЕН и АНН, проф. А.С.Андреева. – Ульяновск: УлГУ, 2002. – 176с.

В сборнике публикуются труды преподавателей, сотрудников и аспирантов механико-математического факультета по фундаментальным проблемам математики и механики. Также публикуются статьи российских и зарубежных ученых, с которыми ведутся совместные научные исследования, и работы, близкие им по тематике.

Данный выпуск трудов представляет интерес для специалистов, аспирантов и студентов, занимающихся проблемами теории устойчивости и ее приложений, численного анализа, теории управления и теории вероятностей.

УДК 531.36

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

А.С. Андреев

Задача об устойчивости положения равновесия механической системы в зависимости от структуры действующих сил является классической задачей. В случае нестационарных связей и явной зависимости действующих сил от времени эта задача до настоящего времени остается малоисследованной. Определенные результаты можно найти в статьях [1-5]. Целью настоящей работы является развитие и обобщение этих результатов.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим голономную механическую систему с нестационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q \in R^n$. Кинетическая энергия системы

$$T = T_2 + T_1 + T_0,\ 2T = \dot{q}'A(t,q)\dot{q},\ T_1 = B'(t,q)\dot{q},\ T_0 = T_0(t,q),$$

где вектор $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ обозначен как вектор-столбец, $A(q)$ есть $(n \times n)$ – матрица, положительно определенная для всех $q \in R^n$, так что имеет место матричное неравенство $A(t,q) \geq A = a_0E$, $a_0 = const > 0$, E – единичная матрица, $B(t,q)$ – матрица-столбец. Здесь и в дальнейшем $()'$ означает транспонирование, $\|q\|$ есть норма в R^n, $\|q\|^2 = q'q = q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2$.

Движение системы под действием обобщенных сил $Q = Q(t,q,\dot{q})$ может быть описано уравнениями Лагранжа, приведенными к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q + G\dot{q} + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t},\ G'(t,q) = -G(t,q), \qquad (1.1)$$

где составляющие $G\dot{q}$, $\dfrac{\partial T_0}{\partial q}$, $\dfrac{\partial B}{\partial t}$ можно трактовать как обобщенные силы, обусловленные инерциальностью связей.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02-01-00877, № 00-15-96150).

Пусть $Q(t,0,0) + \dfrac{\partial T_0(t,0)}{\partial q} - \dfrac{\partial B(t,0)}{\partial t} \equiv 0$, так что система имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$.

Рассмотрим задачу об устойчивости этого положения равновесия в зависимости от следующего представления всех сил

$$Q^*(t,q,\dot{q}) = Q(t,q,\dot{q}) + G(t,q)\dot{q} + \frac{\partial T_0}{\partial q}(t,q) - \frac{\partial B}{\partial t}(t,q) =$$

$$= Q_p(t,q) + Q_r(t,q) + Q_g(t,q,\dot{q}) + Q_d(t,q,\dot{q}),$$

где Q_p, Q_r, Q_g и Q_d есть соответственно потенциальные, неконсервативные, гироскопические и диссипативные силы

$$Q_p(t,0) \equiv 0,\ Q_p(t,q) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q},\ \Pi = \Pi(t,q),\ Q_r(t,0) \equiv 0,\ Q_g(t,q,0) \equiv 0,$$

$$Q_d(t,q,0) \equiv 0,\ q'Q_r(t,q) \equiv 0,\ \dot{q}'Q_g(t,q,\dot{q}) \equiv 0.$$

Будем предполагать, что функции входящие в уравнения (1.1) таковы, что движения системы непрерывны по начальным условиям $(t_0, q_0, \dot{q}_0) \in R^+ \times R^n \times R^n$. При определении условий асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ с применением теорем из [2,3,6] будет предполагаться, что правые части системы (1.1), разрешенные относительно $\ddot{q}$, удовлетворяют условию Липшица по $(q,\dot{q}) \in K$, $K = \{\|\dot{q}\| \le \rho_1, \|q\| \le \rho_2\}$ для любых $\rho_1, \rho_2 > 0$, гарантирующее предкомпактность разрешенных уравнений [2,6,7] и соответственно применимость теорем из [2,3,6].

Для удобства изложения в дальнейшем будем обозначать через H класс функций типа Хана, $a \in H$, если $a : R^+ \to R^+$, $a(0) = 0$, $a(\alpha)$ непрерывна в точке $\alpha = 0$ и строго монотонно возрастает [8]. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим классы непрерывных функций $\gamma_1, \gamma_2 : R^+ \to R^+$, таких, что соответственно

$$\lim_{t\to+\infty, T\to+\infty} \inf \int_t^{t+T} \gamma_1(\tau)d\tau > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \inf \int_{t_n}^{t_n+T_0} \gamma_2(\tau)d\tau > 0,$$

где $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность, $T_0 > 0$.

В задаче об устойчивости по части координат положим $q^1 = (q_1, q_2, ..., q_m)'$, $q^2 = (q_{m+1}, ..., q_n)'$. Обозначим также: $B_\varepsilon = \{q \in R^n :$

$\|q\| < \varepsilon\}$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$, $P_0 = \frac{\partial \Pi_0}{\partial q}(0)$, $\Gamma^-(t) = \{q \in R^n : \Pi(t,q) < 0\} \bigcap B_\varepsilon$, $\Gamma_0^-(t) = \{q \in R^n : \Pi_0(q) < 0\} \bigcap B_\varepsilon$, $B_\varepsilon^1 = \{q \in R^n : \|q^1\| < \varepsilon\}$, $\Gamma_1^+(t) = \{q \in R^n : \Pi(t,q) > 0\} \bigcap B_\varepsilon^1$.

2. Устойчивость под действием потенциальных сил.

Пусть $Q^* = Q_\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$, $\Pi = \Pi(t,q)$.

Утверждение 2.1. Если для всех $(t,q) \in R^+ \times B_\varepsilon$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \dot{q}'\frac{\partial A(t,q)}{\partial t}\dot{q} \geq 0,\ \Pi(t,q) \geq a(\|q\|), \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial t} \leq 0,$$

тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно устойчиво.

Утверждение есть следствие теоремы Ляпунова [8,9] с функцией $V = T_2 + \Pi$.

Утверждение 2.2. Если для всех $(t,q) \in R^+ \times B_\varepsilon$

$$q'\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} \leq 0,$$

тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ неустойчиво.

Утверждение 2.3. Если для некоторого $t_0 \in R^+$ множество $\Gamma^-(t_0) \neq \Omega$ и $\{q = 0\} \in \partial\Gamma^-(t_0)$, а также для всех $(t,q) \in R^+ \times \Gamma^-(t)$, $\dot{q} \in B_\varepsilon$

$$\dot{q}'\frac{\partial A(t,q)}{\partial t}\dot{q} \leq 0,\ \frac{\partial \Pi(t,q)}{\cdot\partial t} \leq 0,\ q'\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} \leq 0,$$

тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ неустойчиво.

Утверждения 2.2 и 2.3 выводятся на основе теоремы о неустойчивости из [2].

Утверждение 2.4. Для специального представления $\Pi(t,q) = p(t)\Pi_0(q)$, $0 < p(t) \leq p_1$ утверждения 2.1–2.3 остаются в силе, если их условия соответственно поменять на следующие:

2.4.1. Для всех $t \in R^+$ и $q \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} \geq 0,\ \dot{p}(t) \geq 0, \Pi_0(q) > 0,$$

2.4.2. Для всех $q \in B_\varepsilon$

$$q'\frac{\partial \Pi_0(q)}{\partial q} \leq 0,$$

2.4.3. Множество $\Gamma_0^- \neq \Omega$ и $\{q = 0\} \in \partial\Gamma_0^-$, а также для всех $t \in R^+$ и $q \in \Gamma_0^-$, $\dot{q} \in B_\varepsilon$,

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \leq 0,\ \dot{p}(t) \geq 0,\ q'\frac{\partial \Pi_0(q)}{\partial q} \leq 0.$$

Пример 2.1. Пусть тяжелое твердое тело закреплено с помощью шарового шарнира на платформе, совершающей вертикальные колебания по закону $\zeta = \zeta(t)$. На основании утверждений 2.1 и 2.4.1 можно найти, что при условиях

$$0 < \zeta_0 \leq \ddot{\zeta}(t) + g \leq \zeta_1,\ \dddot{\zeta}(t) \leq 0 \text{ или } \dddot{\zeta}(t) \geq 0$$

положение равновесия тела, при котором его центр тяжести C находится ниже точки закрепления, устойчиво по угловым скоростям и двум углам, определяющим отклонение OC от вертикали.

На основании утверждения 2 можно найти, что при любом законе $\zeta = \zeta(t)$, $\ddot{\zeta}(t) + g \geq 0$, верхнее положение равновесия тела неустойчиво.

3. Устойчивость под действием гироскопических и диссипативных сил. Пусть $Q^* = Q_g(t, q, \dot{q}) + Q_d(t, q, \dot{q})$.

Следующий пример показывает, что в отличие от автономного случая [11] действие одних линейных гироскопических сил $Q_g = G(t)\dot{q}$, $G' = -G$, $detG \neq 0$, не приводит к устойчивости $q = \dot{q} = 0$.

Пример 3.1. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -p(t)\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = p(t)\dot{x}_1 \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, находим следующий закон движения системы

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + y_1^0 \int\limits_{t_0}^{t} \cos(q(\tau, t_0) + y_2^0) d\tau \\ x_2(t) = x_{20} + y_1^0 \int\limits_{t_0}^{t} \sin(q(\tau, t_0) + y_2^0) d\tau \end{cases}$$

$$y_1^0 = \pm\sqrt{\dot{x}_{10}^2 + \dot{x}_{20}^2}, \operatorname{tg} y_2^0 = \frac{\dot{x}_{20}}{\dot{x}_{10}}, q(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau.$$

Из этого закона следует, что в зависимости от функции $p(t)$ нулевое положение равновесия системы (3.1) может быть как устойчивым так и неустойчивым.

На основании результатов из [4,7] имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Пусть на систему (1.1) действуют гироскопические силы и диссипативные силы такие, что

$$-\frac{1}{2}\dot{q}'\frac{\partial A(t,q)}{\partial t}(t,q)\dot{q} + \dot{q}'Q_d(t,q,\dot{q}) \leq -a(\|\dot{q}\|), \text{ для всех } (t,q,\dot{q}) \in R^+ \times \Gamma.$$

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$.

Утверждение 3.2. Если в условиях утверждения 3.2 диссипативные силы являются линейными по $\dot{q}$

$$Q_d(t,q,\dot{q}) = -D(t,q,\dot{q})\dot{q}, \dot{q}'D\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}'\frac{\partial A}{\partial t}\dot{q} \geq \beta_0\|\dot{q}\|^2, \beta_0 > 0,$$

то $q = \dot{q} = 0$ экспоненциально устойчиво по $\dot{q}$ и равномерно устойчиво по q.

Пусть на систему (1.1) действуют линейные гироскопические силы и линейные диссипативные силы с частичной диссипацией

$$Q^*(t,q,\dot{q}) = G(t,q)\dot{q} - D(t,q)\dot{q}, G' = -G, \dot{q}'D\dot{q} \leq 0, \qquad (3.1)$$

где матрицы G и D ограничены со своими производными до $n+1$-го порядка включительно по $(t,q) \in R^+ \times K$.

Положим $\Gamma(t) = A^{-1}(t,0)G(t,0)$ и составим матрицу $U = (U_1, U_2, ..., U_n)$, $U_1(t) = A^{-1}(t,0)D(t,0)$, $U_2(t) = \dot{U}_1(t) + U_1(t)\Gamma(t)$, $U_3(t) = \dot{U}_2(t) + U_2(t)\Gamma(t)$,..., $U_n(t) = \dot{U}_{n-1}(t) + U_{n-1}\Gamma(t)$.

Определение 3.1. Пара матриц $(D(t,0), \Gamma(t))$ строго наблюдаема, если ранг матрицы U равен n и это определяется некоторым минором этой матрицы $\triangle_n(t)$, $det\triangle_n(t) \geq \triangle_0 = const > 0$.

Утверждение 3.3. Положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1.1) под действием сил (3.1) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$, если пара матриц $(D(t,0), \Gamma(t))$ строго наблюдаема.

Пример 3.2. Пусть симметричное твердое тело с осью симметрии Cz, вращающееся вокруг неподвижного центра масс C, совершает под действием момента $M_z = M_z(t)$ нестационарное вращательное движение вокруг оси Oz по закону $p = q = 0$, $r = r_0(t)$, $r_0(t) \in \Omega_1$. Используя утверждение 3.3, можно показать, что под действием моментов $M_x = -\gamma_1(t)p$, $M_y = 0$ (или $M_x = 0, M_y = -\gamma_1(t)q$), $\gamma_1 \in \Omega_1$, заданное нестационарное вращение будет глобально равномерно асимптотически устойчиво по p и q.

4. Устойчивость под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил.

Пусть

$$Q^* = Q_p(t,q) + Q_g(t,q,\dot q) + Q_d(t,q,\dot q), Q_p(t,q) = -\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q}.$$

Аналогично утверждениям 2.1 и 2.4.1 имеем следующий результат.

Утверждение 4.1. Если выполнены условия утверждения 2.1 и 2.4.1, тогда положение равновесия $\dot q = q = 0$ остается равномерно устойчивым при любых гироскопических и диссипативных силах.

На основании теорем из [2,3,5,7] имеем следующие результаты.

Утверждение 4.2. Пусть потенциальные и диссипативные силы таковы, что для всех $(t,q,\dot q) \in R^+ \times B_\varepsilon \times B_\varepsilon$

$$\Pi(t,q) \geq a_1(\|q\|), \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial t} \leq 0, \left\| \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} \right\| \geq a_2(\|q\|),$$

$$-\frac{1}{2}\dot q' \frac{\partial A(t,q)}{\partial t}\dot q + \dot q' Q_d(t,q,\dot q) \leq -\gamma_1(t) a_3(\|\dot q\|) \quad (\leq -\gamma_2(t) a_3(\|q\|)).$$

Тогда положение равновесия $\dot q = q = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво (асимптотически устойчиво равномерно по $(q_0, \dot q_0)$).

Утверждение 4.3. Если для некоторого $t_0 \in R^+$ множество $\Gamma^-(t_0) \neq \Omega$, $\{q=0\} \in \partial\Gamma^-(t_0)$, а также для всех $(t,q) \in R^+ \times \Gamma^-(t)$

$$\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial t} \leq 0, \dot q' Q_d(t,q,\dot q) - \frac{1}{2}\dot q' \frac{\partial A(t,q)}{\partial t}\dot q \leq -\gamma_2(t) a_3(\|\dot q\|),$$

то положение равновесия $\dot q = q = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Из условий утверждения 4.1 или 4.2 следует, что $\Pi(t,q) \to \Pi_0(q)$ при $t \to +\infty$. Используя это соотношение, исследуем устойчивость положения равновесия $\dot q = q = 0$ под действием линейных сил с частичной диссипацией, таких что

$$\dot q' Q_d(t,q,\dot q) - \frac{1}{2}\dot q' \frac{\partial A(t,q)}{\partial t}\dot q \leq -\gamma_1(t)\dot q' D_0 \dot q \leq 0, \qquad (4.1)$$

где D_0 есть некоторая постоянно-положительная матрица.

Утверждение 4.4. Пусть $A(t,q) = E$, гироскопические силы отсутствуют, а потенциальные и диссипативные силы, таковы, что: для всех $(t,q,\dot q) \in R^+ \times B_\varepsilon \times B_\varepsilon$

$$\Pi_0(q) > 0 \quad (q \neq 0), \left\| \frac{\partial \Pi_0(q)}{\partial q} \right\| \geq a_1(\|q\|),$$

выполняется соотношение (4.1); матрица $(D_0, D_0P_0, ..., D_0P_0^{n-1})$ наблюдаема.

Тогда положение равновесия системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Утверждение 4.5. Пусть потенциальные и диссипативные силы таковы, что:

1) движения системы из некоторой окрестности положения равновесия $q = \dot q = 0$ равномерно ограничены по q^2;

2) для всех $(t,q,\dot q) \in R^+ \times B_\varepsilon^1 \times B_\varepsilon$

$$\Pi(t,q) \geq a_1(\|q^1\|), \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial t} \leq 0, \left\| \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} \right\| \geq a_2(\|q^1\|),$$

$$\dot q' Q - \frac{1}{2} \dot q' \frac{\partial A}{\partial t} \dot q \leq -\gamma_1(t) a_3(\|\dot q\|).$$

Тогда положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по $\dot q$ и q^1.

Утверждение 4.6. Если для $(t,q) \in R^+ \times \Gamma_1^+(t)$

$$\left\| \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} \right\| \geq a_2(\|q^1\|),$$

то при выполнении всех остальных условий утверждения 4.5 положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot q$ и q^1.

Пример 4.1. В примере 2.1 устойчивое нижнее положение тела под действием диссипативных моментов с полной диссипацией становится асимптотически устойчивым. Верхнее положение равновесия тела под действием диссипативных моментов при условиях $\ddot\zeta(t) + g > 0$, $\dddot\zeta(t) \leq 0$ или $\dddot\zeta(t) \geq 0$ остается неустойчивым.

5. Устойчивость под действием квазипотенциальных, гироскопических и диссипативных сил.

Действие некоторых сил приводится к виду $Q_p = -P(t,q)\frac{\partial\Pi(t,q)}{\partial q}$, где $P(t,q)$ есть некоторая ограниченная матрица $n \times n$, $detP \geq p_0 > 0$, $\Pi = \Pi(t,q)$ – скалярная функция. Влияние таких сил, которые можно назвать квазипотенциальными, на устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ целесообразно исследовать, не прибегая к разложению на потенциальные и неконсервативные силы, как в [11].

Допустим, что матрица $P^{-1}A$ является положительно-определенной, а действие сил такое, что имеет место оценка

$$\dot{q}'P^{-1}Q_g + \dot{q}'P^{-1}Q_d + \dot{q}'P^{-1}\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{1}{2}\dot{q}'\left(P^{-1}\frac{dA}{dt} - P^{-1}\frac{dP}{dt}P^{-1}A\right)\dot{q} \leq$$

$$\leq -\gamma_1(t)a_1(\|\dot{q}\|) \quad (\leq -\gamma_2(t)a_2(\|\dot{q}\|)). \tag{5.1}$$

На основании теорем [2,3,7] можно утверждать, что результаты 4.1-4.3 имеют место, если их вторые условия поменять на условие (5.1), а остальные предположения оставить без изменений.

<u>Пример 5.1.</u> В задаче об устойчивости нестационарных вращательных движений гироскопа в кардановом подвесе из [11] дополнительно предположим, что гироскоп установлен на подвижном основании, совершающем вертикальные колебания по закону $\zeta = \zeta(t)$. Уравнения движения, определяемые функцией Рауса [11]

$$R = \frac{1}{2}(A + A_1)\dot{\theta}^2 - M(g + \ddot{\zeta}(t))z_0\cos\theta + c\dot{\phi}(t)\cos\theta +$$

$$+\frac{1}{2}(A + B_1)\dot{\phi}^2(t)\sin^2\theta + \frac{1}{2}C_1\dot{\phi}^2(t)\cos^2\theta - \frac{1}{2}A_2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{C}$$

допускают существование обобщенных стационарных движений

$$\dot{\theta} = 0, \theta = 0, \dot{\phi} = \frac{c}{C} - \dot{\phi}(t), \tag{5.2}$$

в которых плоскость внутренней рамки вертикальна и совпадает с плоскостью внешней рамки, а ось Oz ротора направлена вертикально вверх. Используя утверждение 4.2 с дополнением из п.5, можно показать, что под действием момента $M_\theta = -\gamma(t)\dot{\theta}$, при условиях

$$0 < d_0 \leq d(t) \leq d_1, d(t) = c\dot{\phi}(t) - M(g + \ddot{\zeta}(t))z_0 + (C_1 - A - B_1)\dot{\phi}^2(t),$$

$$\dot{d}(t) + 2\gamma(t)d(t) \geq \gamma_1(t), \gamma_1 \in \Omega_1,$$

обобщенное стационарное движение (5.2) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{\theta}$ и θ.

6. Устойчивость при наличии неконсервативных сил.

Утверждение 6.1. Положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ под действием одних неконсервативных сил, $Q^* = Q_r(t, q)$, неустойчиво.

Утверждение 6.2. Если $Q^* = Q_d + Q_r$, при этом диссипативные силы являются линейными, $Q_d = -D(t,q)\dot{q}$, $\partial D/\partial t \geq 0$, а неконсервативные силы $\|Q_r(t,q)\| > a(\|q\|)$ для $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times B_\varepsilon \times B_\varepsilon$. Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ неустойчиво.

Утверждение 6.3. При одновременном выполнении условий утверждений 2.2 и 6.2 положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тереки Й., Хатвани В.Л. Об асимптотическом останавливании при наличии вязкого трения // ПММ. 1982. Т. 46. Вып.1. С. 20-26.

2. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавто-номной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225-232.

3. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавто-номной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707-712.

4. Тереки Й., Хатвани Л. Функция Ляпунова типа механической энергии // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 894-899.

5. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т.60. Вып.3. С. 388-396.

6. Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып. 4. С.539-547.

7. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. N 2. P. 184-202.

8. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N.Y. etc.: Springer, 1977. 396 p.= Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

10. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

11. Андреев А.С., Ризито К. Об устойчивости обобщенного стационарного движения // ПММ. 1992. Т.66. Вып.3. С. 339-349.

УДК 531.36

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ И СИНТЕЗ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ[2]

А.Ю. Богданов

Данная работа является продолжением и развитием статей автора [2,3] и основана в большей своей части на фундаментальных результатах работы [1]. Здесь будут установлены общие условия стабилизируемости и ограничения на векторное стабилизирующее управление для системы

$$\dot{x} = X(t,x,U) = F(t,x) + B(t,x)U, x \in \Gamma, t \geq t_0 \tag{1}$$

При получении изложенных в статье результатов используются методы предельных уравнений и предельных функций Ляпунова, новое понятие наблюдаемости пар матриц [3], а также модифицированный автором алгоритм последовательного определения компонент векторного стабилизирующего управления из [4].

Рассмотрим общую задачу определения стабилизирующего управления и условий его существования для системы (1), когда управление U есть m-мерный вектор, $x \in R^n$, $F(\cdot,\cdot)$ и $B(\cdot,\cdot)$ имеют соответствующие размерности, используя метод предельных уравнений и предельных функций Ляпунова.

Введем определенно-положительную функцию Ляпунова $V = V(t,x)$ и вычислим ее полную производную по времени в силу уравнений динамики системы (1):

$$\dot{V}_{(1)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(t,x,U) + \frac{\partial V}{\partial t}\ . \tag{2}$$

Будем предполагать, что существуют непрерывные частные производные первого порядка функции $V(t,x)$ в области ее определения.

Потребуем такого выбора вектора управлений $U = U(t,x)$, при котором

$$\dot{V}_{(1)} = \dot{V}(t,x,U) \leq -W(t,x) \leq 0\ ,\ \ \forall x \in \Gamma,\ t \geq t_0\ , \tag{3}$$

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00877).

где $W(t,x)$ – некоторая заданная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям предкомпактности [2]. Пусть $\{\Omega(t,x)\}$ – семейство предельных функций для функции $W(t,x)$.

С учетом (2) перепишем неравенство (3) в виде

$$\beta(t,x,U) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(t,x,U) + \frac{\partial V}{\partial t} + W(t,x) \leq 0 \tag{4}$$

$$\forall\ x \in \Gamma \text{ и } t \geq t_0 \ .$$

Если существует такой вектор управлений U, что будет выполнено условие (4), и выполнено условие соответствующей теоремы [1] об асимптотической устойчивости нулевого решения неуправляемой системы, то это векторное управление стабилизирует систему (1). Поэтому, исследуя функцию $\beta(t,x,U)$, можно установить условия стабилизируемости этой системы, а также выделить ограничения, которым должно удовлетворять стабилизирующее векторное управление.

Так же, как и в случае скалярного управления [2], ограничимся здесь рассмотрением класса систем, для которого управление входит в правую часть системы (1) линейно:

$$\dot{x} = X(t,x,U) = F(t,x) + B(t,x)U \ , \tag{1}$$

где $F(t,x)$ имеет тот же смысл, что и в [2], а $B(t,x)$ – функциональная матрица размерности $(n \times m)$, удовлетворяющая условиям (12)-(13) из [2].

После подстановки $X(\cdot)$ из (1) в неравенство (4) последнее примет вид

$$\beta(t,x,U) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T F(t,x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B(t,x)U + \frac{\partial V}{\partial t} + W(t,x) \leq 0 \ ,$$

$$\forall\ x \in \Gamma \text{ и } t \geq t_0 \ .$$

Тогда, аналогично случаю скалярного управления [2], имеет место следующий результат.

Теорема 1. Предположим, что
1) в области $\Gamma \subset R^n$ существуют функция Ляпунова $V(t,x)$: $0 \leq$

$\omega(\|x\|) \leq V(t,x)$, $V(t,x) \rightrightarrows +\infty$ при $x \to \partial\Gamma$, и функция $W(t,x) \geq 0$ такие, что

$$\beta(t,x,0) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T F(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t} + W(t,x) \leq 0 \tag{5}$$

на множестве

$$\left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B(t,x) = 0 \right\}; \tag{6}$$

2) существует векторное управление $U(t,x) \in D$, удовлетворяющее соотношению

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B(t,x)U \geq \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T F(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t} + W(t,x)\ , \tag{7}$$

$$\forall\ x \in \Gamma \text{ и } t \geq t_0\ .$$

3) для любой предельной к $(X(t,x,U(t,x)), W(t,x))$ пары $(\Phi(t,x), \Omega(t,x))$ и соответствующего множества $V_\infty^{-1}(t,c)$ множество непродолжаемых решений системы $\dot{x} = \Phi(t,x)$, содержащихся в множестве $\{V_\infty^{-1}(t,c)\ :\ c = const \geq 0\} \cap \{\Omega(t,x) = 0\}$ состоит из нулевого решения $x = 0$.

Тогда управление $U(t,x)$ стабилизирует систему (1) в Γ до асимптотической устойчивости.

Доказательство теоремы аналогично случаю скалярного управления.

Замечание 1. Если условие 2) теоремы 1 заменить на

2') существует векторное управление $U(t,x) \in D$, удовлетворяющее соотношению

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B(t,x)U \geq \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T F(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t} + W(t,x)\ ,$$

$$\forall\ x \in \Gamma \text{ и } t \geq t_0\ .$$

такое, что существует хотя бы одна предельная к $(X(t,x,U(t,x)), W(t,x))$ пара $(\Phi_0(t,x), \Omega_0(t,x))$ с соответствующим множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$ такая, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c)\ :\ c = const > 0\} \cap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$. (Таким образом, выполнены условия теоремы [1] об эквиасимптотической устойчивости нулевого решения неуправляемой системы.)

Тогда управление $U(t,x)$ стабилизирует систему (1) до асимптотической устойчивости, равномерной по x_0.

Теорема 2. Если

1) в области $\Gamma \subset R^n$ существуют функция Ляпунова $V(t,x) : 0 \le \omega_1(|x|) \le V(t,x) \le \omega_2(|x|), V(t,x) \rightrightarrows +\infty$ при $x \to \partial\Gamma$, и функция $W(t,x) \ge 0$ такие, что выполнено неравенство (5) при тех $x \in \Gamma$ и $t \ge t_0$, которые удовлетворяют векторному уравнению (6);

2) существует векторное управление $U(t,x) \in D$, удовлетворяющее соотношению (7) такое, что для любой предельной к $(X(t,x,U(t,x)), W(t,x))$ пары $(\Phi(t,x), \Omega(t,x))$ множество решений системы $\dot{x} = \Phi(t,x)$, содержащихся в множестве $\{\Omega(t,x) = 0\}$ состоит из нулевого решения $x = 0$.

Тогда векторное управление $U(t,x)$ стабилизирует систему (1) в Γ до равномерной асимптотической устойчивости. (Если $Gamma \equiv R^n$, то система (1) стабилизируема до равномерной асимптотической устойчивости в целом.)

Наиболее существенное отличие рассматриваемой задачи определения векторного стабилизирующего управления от аналогичной задачи со скалярным управлением состоит в том, что для отыскания m компонент вектор-функции управления, имеется лишь одно скалярное неравенство (7).

Таким образом, в отличие от случая скалярного управления, здесь необходим некоторый формальный алгоритм нахождения компонент векторного стабилизирующего управления, удовлетворяющих неравенству (7). В качестве такого алгоритма может быть предложен метод последовательного определения компонент векторного стабилизирующего управления [4], который в данном случае осуществляется следующим образом.

Обозначим через W_1 множество $x \neq 0$ и $t \ge t_0$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_j(t,x) = 0 \ , \quad j = 2, 3, ..., m \ ,$$

где $B_j(t,x)$ – j-й столбец матрицы $B(t,x)$. Тогда на множестве W_1 первая компонента стабилизирующего управления, т.е. управление $u_1(t,x)$, определится из соотношения

$$u_1(t,x)sign(\lambda_1(t,x)) \le -\frac{\beta(t,x,0)}{|\lambda_1(t,x)|} \ ,$$

при $\lambda_1(t,x) \neq 0$, где $\beta(t,x,0)$ определяется из (5),

$$\lambda_1(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_1(t,x) \ ,$$

а $B_1(\cdot)$ – первый столбец матрицы $B(t,x)$, причем значения этих функций вычисляются лишь на множестве W_1. Доопределив $u_1(t,x)$ произвольно на множестве $R^n \setminus W_1$, например, положив $u_1(x,t) \equiv 0$ на этом множестве, или, если на множестве W_1 управление $u_1(t,x)$ задано как аналитическая функция, то, распространив ее на все фазовое пространство, получим значение $u_1(t,x)$ во всем фазовом пространстве.

Подставив в (7) найденное значение $u_1(t,x)$, определим $u_2(t,x)$ на множестве W_2 значений $x \neq 0$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_j(t,x) = 0 \ , \quad j = 3,4,...,m \ ,$$

из соотношения

$$u_2(t,x)sign(\lambda_2(t,x)) \le -\frac{\beta(t,x,0) + \lambda_1(t,x)u_1(t,x)}{|\lambda_2(t,x)|} \ ,$$

при $\lambda_2(t,x) \neq 0$, где

$$\lambda_2(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_2(t,x) \ ,$$

а $B_2(\cdot)$ – второй столбец матрицы $B(t,x)$, причем значения функций $\beta(t,x,0)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ вычисляются на множестве W_2. Доопределив $u_1(t,x)$ произвольно на множестве $R^n \setminus W_2$ (так же, как для $u_1(t,x)$), получим значение $u_2(t,x)$ во всем фазовом пространстве.

Подставив найденные значения $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ в (7), аналогичным образом определим $u_3(t,x)$, и так далее до тех пор, пока не будут последовательно определены все m компонент векторного стабилизирующего управления $U(t,x)$.

Нетрудно показать, что j-я компонента векторного стабилизирующего управления при $j < m$ определяется из условия выполнения на множестве W_j значений $x \neq 0$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_k(t,x) = 0 \ , \quad k = j+1, ..., m \ , \tag{8}$$

неравенства вида

$$u_j(t,x) sign(\lambda_j(t,x)) \leq -\frac{\beta(t,x,0) + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k(t,x) u_k(t,x)}{|\lambda_j(t,x)|} \ , \tag{9}$$

при $\lambda_j(t,x) \neq 0$.

При $j = m$ неравенство (9) должно выполняться при всех $x \in \Gamma$ и $t \geq t_0$, кроме значений x и $t \geq t_0$, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B_m(t,x) = 0 \ .$$

Как и в случае скалярного управления, главная трудность при решении задачи синтеза векторного стабилизирующего управления состоит в выборе функции Ляпунова. Поэтому покажем здесь возможность использования функции Ляпунова вида "квадратичная форма фазовых координат"для получений условий стабилизируемости и определения векторного стабилизирующего управления [3].

Рассмотрим прежде всего класс линейных непрерывных нестационарных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)U \ , \quad x(t_0) = x_0 \ , \tag{10}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — ограниченные функциональные матрицы соответственно размерности $(n \times n)$ и $(n \times m)$.

Примем функцию Ляпунова в виде $V(t,x) = x^T P(t) x$, а функцию $W(t,x) = x^T Q(t) x$. Тогда условием стабилизируемости системы (10) будет

$$\beta(t,x,0) = x^T[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t)]x \leq 0 \tag{11}$$

при

$$x^T P(t) B(t) \equiv 0 \ . \tag{12}$$

Отсюда, аналогично случаю скалярного управления [3], следует следующий результат.

Теорема 3. Векторное управление $U(t,x) = C^T(t)x \in D$ стабилизирует систему (10) до равномерной асимптотической устойчивости в целом, если

1) существуют функциональная матрица $C(t)$ размерности $(n \times m)$, положительно определенная при всех $t \geq t_0$ функциональная матрица $P(t) = P^T(t)$ размерности $(n \times n)$ и знакоположительная при $t \geq t_0$ функциональная матрица $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$ размерности $(n \times n)$ такие, что матрицы

$$\tilde{Q}(t) = -\{\dot{P}(t) + P(t)[A(t) + B(t)C^T(t)] +$$

$$+[A(t) + B(t)C^T(t)]^T P(t)\} \geq 0 \ ,$$

$$\Delta Q(t) = \tilde{Q}(t) - Q(t) \geq 0$$

неотрицательны для всех $t \geq t_0$;

2) пара $(Q(t), A(t) + B(t)C^T(t))$ строго наблюдаема [3].

Как видно из полученного для линейной системы результата, методика получения условий стабилизируемости и ограничений на стабилизирующее управление в случае векторного управления аналогична скалярному случаю. При этом неравенство $\beta(t,x,0) \leq 0$ остается точно тем же, а лишь изменяется размерность множества значений x, на котором оно проверяется,– если раньше оно задавалось скалярным равенством (6), то теперь оно определяется из условия удовлетворения векторному уравнению (12). Поэтому для нелинейных систем с выделенной линейной частью с векторным управлением условия стабилизируемости будут иметь тот же вид, что и в случае скалярного управления [3]. Необходимо лишь в тех случаях, где исследование проводилось с помощью функции Ляпунова вида "квадратичная форма фазовых координат", заменить прямоугольную матрицу L размерности $[n \times (n-1)]$ на прямоугольную матрицу

$$L_0 = \begin{bmatrix} C_0^T \\ \dots \\ I_{n-m} \end{bmatrix} ,$$

определяемую из условия приведения системы уравнений (12) к виду $x = L_0\tilde{x}_0$, где

$$\tilde{x}_0^T = (x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots,\ x_n)\ .$$

Ограничения на векторное стабилизирующее управление также будут иметь вид, аналогичный случаю скалярного управления [3], с заменой n-мерного вектора B на матрицу B размерности $(n \times m)$ и скалярного управления u на векторное управление U. Для определения компонент векторного стабилизирующего управления можно использовать метод последовательного их определения, изложенный в общем виде ранее.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып.2. - С. 225-332.

[2] *Богданов А.Ю.* Синтез асимптотически устойчивых непрерывных нестационарных систем управления // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып. 1 Том 8. - Ульяновск: УлГУ. 2000. - С. 31-38.

[3] *Богданов А.Ю.* Синтез асимптотически устойчивых непрерывных систем с выделенной линейной частью // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып. 2(11) - Ульяновск: УлГУ. 2001. - 10 с.

[4] *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. - Москва: Наука, 1977.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ШУЛЕРА[3]

Т.А. Бойкова

В работе исследуется задача об устойчивости обобщенных стационарных движений маятника Шулера при самых общих предположениях относительно движения корабля, на котором установлен маятник.

Для управления подвижными объектами часто требуется направление вертикали. Рассмотрим задачу построения вертикали на движущемся корабле. Для решения этой задачи примем идеальную модель Земли, под которой понимается тело в форме шара с однородным распределением массы. Представим себе, что Земля окружена невращающейся сферой радиуса R, и будем рассматривать движение корабля по поверхности этой сферы. С невращающейся сферой свяжем систему координат $\xi_1\xi_2\xi_3$, центр O_* которой расположим в центре Земли, а оси направим на неподвижные звезды.

Пусть на корабле установлена невозмущаемая гироскопическая система (маятник Шулера) [3]. Движения маятника будем изучать в системе координат $On_1n_2n_3$, связанной с вектором $\mathbf{V}$ абсолютной скорости корабля: ось n_1 направлена по скорости $\mathbf{V}$, ось n_3 – по нормали к поверхности Земли.

Будем считать, что величина линейной скорости корабля изменяется по закону $V = V(t)$, тогда проекции p_1, p_2, p_3 угловой скорости системы координат $On_1n_2n_3$ имеют вид

$$p_1 = 0,\ p_2 = \frac{V(t)}{R},\ p_3 = p_3(t).$$

При исследовании устойчивости компоненты p_2, p_3 полагаются известными функциями времени.

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта УР.04.01.004 программа "Университеты России".

Обозначим главные оси инерции маятника, проходящие через точку подвеса O, через z_1, z_2, z_3. При этом полагаем, что ось z_3 проходит через центр тяжести маятника. Тогда вектор центра масс $\mathbf{l}$ в системе осей z_i имеет координаты $(0, 0, -l)$.

Маятник невозмущаем, если моменты инерции относительно осей z_1, z_2 таковы, что $I_1 = I_2 = mlR$. Момент инерции относительно оси z_3 обозначим через I_3. Положение маятника (осей z_i) относительно системы координат $On_1n_2n_3$ определим углами ψ_1, ψ_2, ψ_3. Вычисляя проекции q_1, q_2, q_3 угловой скорости вспомогательного трехгранника y_1, y_2, y_3 на его оси, находим

$$\begin{aligned} q_1 &= p_2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 - p_3 \cos\psi_1 \sin\psi_2 + \dot\psi_1 \cos\psi_2, \\ q_2 &= p_2 \cos\psi_1 + p_3 \sin\psi_1 + \dot\psi_2, \\ q_3 &= -p_2 \sin\psi_1 \cos\psi_2 + p_3 \cos\psi_1 \cos\psi_2 + \dot\psi_1 \sin\psi_2, \end{aligned}$$

с которыми проекции ω_1, ω_2, ω_3 угловой скорости маятника на вспомогательные оси y_1, y_2, y_3 связаны следующими соотношениями:

$$\omega_1 = q_1, \omega_2 = q_2, \omega_3 = q_3 + \dot\psi_3.$$

Кинетическая энергия маятника имеет вид

$$T = \frac{1}{2}V^2 + m\mathbf{V}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{l}) + m\mathbf{V}\cdot[(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{p})\times\mathbf{l}] + \frac{1}{2}mlR(q_1^2+q_2^2) + \frac{1}{2}I_3(q_3+\dot\psi_3)^2.$$

Допустим, что в осях маятника действуют силы вязкого трения, создающие момент $M_{\psi_1} = -k\dot\psi_1$, $M_{\psi_2} = -k\dot\psi_2$ ($k = const > 0$). Составим уравнения движения в форме уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} &\ddot\psi_1 \cos\psi_2 - \dot\psi_1\dot\psi_2 \sin\psi_2 + (p_2\cos\psi_1 + p_3\sin\psi_1)\dot\psi_1 \sin\psi_2 + \\ &+(p_2\sin\psi_1 - p_3\cos\psi_1)\dot\psi_2\cos\psi_2 + (\dot p_2\sin\psi_1 - \dot p_3\cos\psi_1)\sin\psi_2 + \\ &+i_3[(-p_2\sin\psi_1 + p_3\cos\psi_1)\cos\psi_2 + \dot\psi_1\sin\psi_2 + \dot\psi_3]\times \\ &\times(p_2\cos\psi_1 + p_3\sin\psi_1 + \dot\psi_2) - \\ &-(-p_2\sin\psi_1\cos\psi_2 + p_3\cos\psi_1\cos\psi_2 + \dot\psi_1\sin\psi_2)\times \\ &\times(p_2\cos\psi_1 + p_3\sin\psi_1 + \dot\psi_2) = \\ &= -p_2p_3\cos\psi_1 - (\nu^2 - p_2^2)\sin\psi_1 - k\dot\psi_1; \\ &\ddot\psi_2 + \dot\psi_1(-p_2\sin\psi_1 + p_3\cos\psi_1) + \dot p_2\cos\psi_1 + \dot p_3\sin\psi_1 + \\ &+(p_2\sin\psi_1\sin\psi_2 - p_3\cos\psi_1\sin\psi_2 + \dot\psi_1\cos\psi_2)\times \\ &\times(-p_2\sin\psi_1\cos\psi_2 + p_3\cos\psi_1\cos\psi_2 + \dot\psi_1\sin\psi_2) - \\ &-i_3[(-p_2\sin\psi_1 + p_3\cos\psi_1)\cos\psi_2 + \dot\psi_1\sin\psi_2 + \dot\psi_3]\times \\ &\times(p_2\sin\psi_1\sin\psi_2 - p_3\cos\psi_1\sin\psi_2 + \dot\psi_1\cos\psi_2) = \end{aligned}$$

$$= \dot{p}_2\cos\psi_2 + p_2p_3\sin\psi_1\sin\psi_2 + (p_2^2-\nu^2)\cos\psi_1\sin\psi_2 - k\dot{\psi}_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left[(-p_2\sin\psi_1 + p_3\cos\psi_1)\cos\psi_2 + \dot{\psi}_1\sin\psi_2 + \dot{\psi}_3\right] = 0;$$

где $i_3 = \dfrac{I_3}{mlR}$, $\nu = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

Рассматриваемая система имеет обобщенное стационарное движение, отвечающее значению циклической постоянной $c = 0$,

$$\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dot{\psi}_3 = -p_3(t). \tag{1}$$

Составим уравнения возмущенного движения, для этого положим

$$\psi_1 = x_1, \psi_2 = x_2.$$

Раскладывая в ряд по степеням x_i функции, входящие в уравнения движения, и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 - 2p_3\dot{x}_2 + (\nu^2 - p_3^2)x_1 - \dot{p}_3x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2p_3\dot{x}_1 + k\dot{x}_2 + \dot{p}_3x_1 + (\nu^2 - p_2^2 - p_3^2)x_2 = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$y_1 = \sqrt{p_3}x_1, y_2 = \sqrt{p_3}x_2.$$

Уравнения движения в новых переменных представим в матричной форме

$$\begin{pmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = 0, \tag{2}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} k - \dfrac{\dot{p}_3}{p_3} & -2p_3 \\ 2p_3 & k - \dfrac{\dot{p}_3}{p_3}\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \nu^2 - p_3^2 - k\dfrac{\dot{p}_3}{2p_3} + \dfrac{3\dot{p}_3^2 - 2p_3\ddot{p}_3}{4p_3^2} & 0 \\ 0 & \nu^2 - p_2^2 - p_3^2 - k\dfrac{\dot{p}_3}{2p_3} + \dfrac{3\dot{p}_3^2 - 2p_3\ddot{p}_3}{4p_3^2}\end{pmatrix}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = \frac{1}{2}(\dot{y}_1\ \dot{y}_2)\,C^{-1}\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2.$$

По критерию Сильвестра, получаем условия определенно-положительности функции Ляпунова:

$$0 < \alpha_0 \le \nu^2 - p_3^2(t) - k\frac{\dot p_3(t)}{2p_3(t)} + \frac{3\dot p_3^2(t) - 2p_3(t)\ddot p_3(t)}{4p_3(t)^2} \le \alpha_1 < +\infty, \quad (3)$$

$$0 < \beta_0 \le \nu^2 - p_2^2(t) - p_3^2(t) - k\frac{\dot p_3(t)}{2p_3(t)} + \frac{3\dot p_3^2(t) - 2p_3(t)\ddot p_3(t)}{4p_3^2(t)} \le \beta_1 < +\infty, \quad (4)$$

где α_0, α_1, β_0, β_1 – положительные постоянные.

Найдем производную в силу системы (2)

$$\dot V = (\dot y_1\ \dot y_2)\, C^{-1}\begin{pmatrix}\ddot y_1\\ \ddot y_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\dot y_1\ \dot y_2)\, C^{-1}\dot C C^{-1}\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} + y_1\dot y_1 + y_2\dot y_2 =$$

$$= -(\dot y_1\ \dot y_2)\, C^{-1}\left(B\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(\dot y_1\ \dot y_2)\, C^{-1}\dot C C^{-1}\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} + y_1\dot y_1 + y_2\dot y_2 =$$

$$= -(\dot y_1\ \dot y_2)\, C^{-1}\left(B + \frac{1}{2}\dot C C^{-1}\right)\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}.$$

Эта производная определенно-отрицательна по $(\dot y_1, \dot y_2)$, если матрица $\frac{1}{2}(D + D')$, где $D = C^{-1}\left(B + \frac{1}{2}\dot C C^{-1}\right)$, является положительно-определенной. Эти условия записываются в виде

$$0 < \gamma_0 \le f(t) = 2\left(k - \frac{\dot p_3(t)}{p_3(t)}\right)\left(\nu^2 - p_3^2(t) - k\frac{\dot p_3(t)}{2p_3(t)} + \frac{3\dot p_3^2(t) - 2p_3(t)\ddot p_3(t)}{4p_3(t)^2}\right) -$$

$$-2p_3(t)\dot p_3(t) - \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot p_3(t)}{p_3(t)}\right) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{3\dot p_3^2(t) - 2p_3(t)\ddot p_3(t)}{p_3^2(t)}\right) \le \gamma_1 < +\infty, \quad (5)$$

$$0 < \gamma_2 \le f(t)\left(f(t) - 2\left(k - \frac{\dot p_3(t)}{p_3(t)}\right)p_2^2(t) - 2p_2(t)\dot p_2(t)\right) -$$

$$-4p_3^2(t)p_2^4(t) \le \gamma_3 < +\infty, \quad (6)$$

где γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 – положительные константы.

Множество, на котором $\dot V = 0$ есть множество $\{\dot y_1 = \dot y_2 = 0\}$. Так как уравнения предельные к (2) имеют аналогичный вид, то множество $\{\dot y_1 = \dot y_2 = 0\}$ в силу условий (3)–(6) не содержит решений этих предельных систем. Отсюда следует, что условия (3)–(6) являются условиями равномерной асимптотической устойчивости по ψ_1, ψ_2, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$ обобщенного стационарного движения (1) относительно движений, отвечающих невозмущенному значению циклической постоянной $c = 0$, в силу уравнений линейного приближения. Это несложно получить на основании работы [1]. Из равномерной асимптотической устойчивости в силу линейного приближения следует равномерная асимптотическая устойчивость в силу нелинейных уравнений.

На основании работы [2] получаем, что обобщенное стационарное движение (1) будет являться также равномерно устойчивым по ψ_1, ψ_2, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, $\dot{\psi}_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.

2. Андреев А.С., Ризито К. Об устойчивости обобщенного стационарного движения // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 339–349.

3. Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. – М.: Наука. 1984. 116 с.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ[4]

М.В. Дмитриева

Определяются стационарные движения механической системы с переменными массами, имеющей циклические координаты. Выводятся условия их устойчивости.

Рассмотрим механическую систему с переменными массами $m_j = m_j(t, q)$, $(j = 1, \ldots, N)$ с нестационарными голономными связями, описываемую n обобщенными независимыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, находящуюся под действием потенциальных при закрепленных массах $\Pi = \Pi(m(t,q), t, q)$, гироскопических и диссипативных сил $Q = Q(t, q, \dot{q})$. Ее движение описывается уравнениями [1]

$$\frac{d^\circ}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial^\circ T}{\partial q} = \Psi + Q - \frac{\partial^\circ \Pi}{\partial q}, \tag{1}$$

где $q^T = (q_1, \ldots, q_n)$ - обобщенные независимые координаты; $T = \frac{1}{2}(\dot{q})^T A(m(t,q), t, q)\dot{q} + B^T(m(t,q), t, q)\dot{q} + C(m(t,q), t, q)$ - кинетическая энергия системы; $\Pi = \Pi(m(t,q), t, q)$ - потенциальная энергия при закрепленных массах; $Q = Q(t, q, \dot{q})$ - равнодействующая гироскопических и диссипативных сил; Ψ - обобщенные реактивные силы, обусловленные отделением и присоединением частиц к материальным точкам, их движением внутри этих материальных точек; $\frac{d^\circ(\ )}{dt}$ и $\frac{\partial^\circ(\ )}{\partial q}$ - производные при закрепленных массах.
Производные в уравнениях (1) вычисляются вне зависимости от изменения масс, поэтому для составления уравнений (1) можно писать уравнения Лагранжа соответствующей задачи с постоянными массами, добавляя к действующим силам обобщенные реактивные силы.

Допустим, что кинетическая энергия представима в виде:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q})^T A_1 \dot{q} + g((\dot{z})^T A_2 \dot{q} + \frac{1}{2}(\dot{z})^T A_3 \dot{z}) + (\dot{q})^T B_1 + g(\dot{z})^T B_2 + C, \tag{2}$$

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России"(проект № УР.04.01.004).

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)^T$, $z = (q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n)$,
$A_1 = A_1(t, q, m(t, q))$ есть положительно-определенная матрица размерности $m \times m$, коэффициент g зависит только от изменяющихся масс точек системы, $g = g(m_\lambda(t, q))$, коэффициенты матриц A_2 и A_3 от таких масс не зависят;
B_1 и B_2 есть матрицы-столбцы размерностей $m \times 1$ и $(n - m) \times 1$ соответственно, причем коэффициенты B_2 от изменяющихся масс точек системы не зависят.

Определим, что для такой системы координаты $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$ являются циклическими, если массы точек $m_j = m_j(t, q)$, $(j = 1, \ldots, N)$, кинетическая и потенциальная энергии системы T и Π от координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$ не зависят,

$$\frac{\partial^\circ m_\lambda}{\partial z} = \frac{\partial^\circ T}{\partial z} = \frac{\partial^\circ \Pi}{\partial z} = 0.$$

Перейдем к переменным Рауса $q, \dot{q}, z$ и p, $p = (p_{m+1}, \ldots, p_n)^T$ согласно замене $\dot{z}$ на p по формуле

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = g(A_2\dot{q} + A_3\dot{z} + B_2) = pg, \tag{3}$$

т.о. $p = A_2\dot{q} + A_3\dot{z} + B_2$.
Разрешая последние соотношения относительно $\dot{z}$ (что можно сделать всегда, так как $det\ A_3(t, q) \neq 0$), получим выражение $\dot{z}$ через p

$$\dot{z} = A_3^{-1}(p - B_2 - A_2\dot{q}). \tag{4}$$

Определим функцию Рауса R по формуле

$$R(m, t, q, \dot{q}, p) = \left(T - \Pi - (\dot{z})^T \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) \Bigg|_{\dot{z} = A_3^{-1}(p - B_2 - A_2\dot{q})} \tag{5}$$

и представим ее, учитывая разложение (2) в виде

$$R = R_2 + R_1 + R_0; \tag{6}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(\dot{q})^T(A_1 - gA_2^T A_3^{-1} A_2)\dot{q},$$

$$R_1 = (g(p - B_2)^T A_3^{-1} A_2 + B_1^T)\dot{q},$$

$$R_0 = -\Pi(t, m, q) + C(m, t, q) - \frac{g(m)}{2}(p - B_2)^T A_3^{-1}(p - B_2).$$

Предположим, что обобщённые гироскопические силы по координатам z отсутствуют, $Q^2 = \Psi^2 = 0$. Тогда система (1) допускает $(n-m)$ циклических интегралов $p = const$ или $p_{m+1} = c_{m+1}, \dots, p_n = c_n$.

Получаем уравнения движения системы (1) в виде

$$\frac{d^\circ}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial^\circ R_2}{\partial q} = \frac{\partial^\circ R_0}{\partial q} + G_1^T \dot q + Q^1 + \Psi^1 - \frac{\partial^\circ}{\partial t}(gA_2A_3^{-1}(c - B_2) + B_1), \quad (7)$$

$$\dot z = -\left.\frac{\partial^\circ R}{\partial p}\right|_{p\,=\,c\,=\,\mathrm{const}} = A_3^{-1}(p - B_2 - A_2\dot q), \qquad G^T = -G$$

где входящие в уравнение величины определяются соотношениями:

$$2R_2 = (\dot q)^T S_2 \dot q, \quad S_2 = A_1 - gA_2^T A_3^{-1} A_2, \quad G_1^T = -G_1,$$

Q^1 и Ψ^1 – равнодействующие диссипативных и гироскопических сил, реактивные силы отнесённые к координатам $q_1, q_2, \dots, q_m$.

Допустим, что при любых значениях m_j, удовлетворяющих $0 < m_{j1} \le m_j(t,q) \le m_{j2}$ $(j = 1, 2, \dots, N)$, при $c = c_0$ и $\dot q = q = 0$ имеет место соотношение

$$\left.\frac{\partial^\circ R_0(t,m,q,c)}{\partial q}\right|_{q\,=\,0,\,c\,=\,c_0} + Q^1(t,q,\dot q)\big|_{q\,=\,0,\,c\,=\,c_0} - \quad (8)$$

$$-\left.\frac{\partial^\circ}{\partial t}(gA_2A_3^{-1}(c - B_2) + B_1)\right|_{q\,=\,0,\,c\,=\,c_0} \equiv 0.$$

Тогда система имеет "обобщенное" стационарное движение, в котором позиционные скорости и координаты $\dot q(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$, а циклические скорости и координаты определяются следующими выражениями

$$\dot z = \dot z_0(t) = A_3^{-1}(t,0)(c_0 - B_2(t,0)), \quad (9)$$

$$z_0(t) = z_0(0) + \int_0^t \dot z_0(\tau)d\tau = z_0(0) + \int_0^t A_3^{-1}(\tau,0)(c_0 - B_2(\tau,0))d\tau.$$

Допустим, что выполнены соотношения (8). При этом связи, наложенные на систему, и действующие силы таковы, что

$$\frac{\partial^\circ R_0}{\partial q} + Q^1 - \frac{\partial^\circ}{\partial t}(gA_2A_3^{-1}(c - B_2) + B_1) =$$

$$= -\frac{\partial^\circ W(t,m,q,c)}{\partial q} + Q^3(t,q,\dot q), \tag{10}$$

где $W(t,m,q,c)$ есть некоторая скалярная функция, а $Q^3(t,q,\dot q)$ представляет собой совокупность некоторых сил.

Теорема 1. Предположим, что:

1) наложенные на систему реономные голономные связи и действующие силы таковы, что при некотором значении $c = c_0$ выполнены (8), (10);

2) функция $W(t,m,q,c)$ положительно-определенна по q при $c = c_0$ и такова, что для всех $t \in R^+$ и малых $\|q\|$ при значении $c = c_0$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\partial^\circ W}{\partial t} \le 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial m}\right)^T \dot m \le 0, \quad \left\|\frac{\partial^\circ W}{\partial q}\right\| \le l = \text{const};$$

3) для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|\partial^\circ W/\partial q\| \ge \delta$ для $c = c_0$ и всех $\{q : \|q\| = \varepsilon\}$ и $t \in R^+$;

4) силы Q^3 и Ψ^1 таковы, что выполняется соотношение:

$$-(\dot q)^T \frac{\partial^\circ S_2}{\partial t}\dot q + \left(\frac{\partial R_2}{\partial m}\right)^T \dot m + (Q^3)^T \dot q + (\Psi^1)^T \dot q \le -h_2(\|\dot q\|) \le 0.$$

Тогда "обобщенное"стационарное движение равномерно устойчиво, равномерно асимптотически устойчиво относительно движений, вдоль которых $p = c_0$ (условная асимптотическая устойчивость).

Допустим, что связи, наложенные на систему, и действующие силы таковы, что выполнено (8), а также

$$\frac{\partial^\circ R_0}{\partial q} + Q^1 - \frac{\partial^\circ}{\partial t}(gA_2A_3^{-1}(c - B_2) + B_1) = \tag{11}$$

$$= -p(t,m,q,c)\frac{\partial^\circ W_0(m,q,c)}{\partial q} + Q^3(t,q,\dot q),$$

где соответственно $p(t,m,q,c)$ есть скалярный коэффициент, а $W_0(m,q,c)$ есть некоторая скалярная функция, кроме того предполагаем, что выполнены следующие условия

а) $W_0(m,0,c)$, $\dfrac{\partial^\circ W_0}{\partial q} = 0$ при $q = 0$ и для всех c; величина $\partial^\circ W_0/\partial q$ ограничена, удовлетворяет условию Липшица по q;

б) $p(t, m, q, c) \in C^1$ по (t, q) и для всех $t \in R^+$, $q \in \{q \in R^n : \|q\| \leq q_0 > 0\}$; $\{c : \|c\| \leq c_1, c_1 > 0\}$ выполнены соотношения

$$0 < p_0 \leq p(t, m, q, c) \leq p_1; \quad \left\| \frac{\partial^\circ p(t, m, q, c)}{\partial q} \right\| \leq r_0 = \text{const}.$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что:
1) наложенные на систему связи и действующие силы таковы, что при значениях $c \in \{c : \|c\| \leq c_1, c_1 > 0\}$ выполнены (8) и (11);
2–3) для всех $t \in R$, малых $\|q\|$ и значениях $c \in \{\|c\| \leqslant c_1 > 0\|$ функция $W_0(t, q, c)$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям 2) - 3) теоремы 1.
4) силы Q^3 и Ψ^1 таковы, что выполняется соотношение:

$$-\frac{1}{p}(\dot{q})^T \frac{\partial^\circ S_2}{\partial t} \dot{q} + \frac{1}{p^2} \left(\frac{\partial^\circ p}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial m} \right)^T \dot{m} \right) (\dot{q})^T S_2 \dot{q} -$$

$$-\frac{1}{p} \left(\left(\frac{\partial R_2}{\partial m} \right)^T \dot{m} + (Q^3)^T \dot{q} + (\Psi^1)^T \dot{q} \right) \geq \gamma_0 E.$$

Тогда подмножество стационарных движений со значениями $\{c : \|c\| \leq c_1 > 0\}$ равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$ и q относительно движений, вдоль которых значения циклических постоянных $c \in \{c : \|c\| \leq c_1 > 0\}$.

Доказательство теорем 1, 2 следует из результатов работ [2-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 240 с.

2. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1967. 276 с.

3. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономной системы относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707-712.

УДК 517.929

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[5]

С.В. Павликов

Обосновывается применение знакопостоянных функционалов Ляпунова в решении задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием.

1. Пусть $R =]-\infty, +\infty[$ есть действительная ось, $R^+ = [0, +\infty[$, R^n есть действительное линейное пространство n-векторов x с нормой $|x|$, $h > 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\left(|\varphi(s)|, \alpha \le s \le \beta\right)$, $_H = \left\{\varphi \in C_{[-h,0]} : \|\varphi\| < H\right\}$, для непрерывной функции $x :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $x_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$ для $-h \le s \le 0$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с конечным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x_t), \qquad f(t, 0) \equiv 0 \tag{1.1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^n$, непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений (1.1).

Допустим, что функция $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет следующим предположениям.

Предположение 1 Для каждого числа r, $0 < r < H$, существует $M = M(r)$, такое, что для $(t, \varphi) \in R^+ \times \bar{C}_r$ выполняется неравенство:

$$|f(t, \varphi)| \le M \tag{1.2}$$

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-15-96150, № 02-01-06162, № 02-01-00877).

Лемма 1.1. [1] Пусть выполняется предположение 1, и $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение (1.1), определенное для любого $t \geq \alpha - h$ и такое, что $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ при всех $t \geq \alpha - h$. Тогда семейство функций $\{x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha\}$ предкомпактно в $\bar{}_r$;

Предположение 2. Для каждого компактного множества $\subset {}_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, т.е. для любого $\subset {}_H$ имеется $m = m(K)$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R^+ \times K$; $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta, \varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства:

$$|f(t, \varphi)| \leq m, \qquad |f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

При этом уравнение (1.1) будет предкомпактным в некотором пространстве F непрерывных функций $f : R^+ \times \Gamma \to R^n$, где $\Gamma-$ некоторое множество в Λ, содержащее множество $\{x_t(\alpha, \varphi), \varphi \in \Lambda, t \geq \alpha + h\}$ [1].

Функция $f^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ называется предельной к f, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что $\{f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1).

Взаимосвязь решений уравнений (1.1) и (1.4) определяется следующей теоремой.

Теорема 1.1 Пусть функция $f^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in R^+\}$ и $\{\varphi_n \in \Gamma\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in R^+$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Тогда, если $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $x^*(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$, то последовательность функций $x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $x^*(t, \alpha, \varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h, \gamma]$ для каждого $\gamma < \beta$.

Данное построение предельных систем и теорема 1.1 были получены в [1].

2. Перейдем к исследованию устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения (1.1) с помощью знакопостоянных функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Введем следующие определения.

Определение 2.1. Решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\| < \delta\}$ следует $\|x_t^*(\alpha, \varphi)\| < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t, \alpha, \varphi)$ любого уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ при всех $t \geq \alpha$.

Определение 2.2. Решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, если оно устойчиво относительно Λ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ и для каждого $\alpha \in R$ существует $\Delta = \Delta(\alpha)$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\| < \Delta\}$ следует, что решение $x^*(t, \alpha, \varphi)$ каждого уравнения (4) стремится к 0 при $t \to \infty$, т.е. $x^*(t, \alpha, \varphi) \to 0, t \to \infty$.

Определение 2.3. Множество Λ содержит решения, асимптотически устойчивые равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества Λ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, и, кроме того, $x_t^*(\alpha, \varphi) \in \Lambda, \quad \forall \varphi \in \Lambda, t \in R^+$.

Функционалом Ляпунова назовем скалярную непрерывную функцию $V : R^+ \times C_H \to R$. Обозначим через $\omega_i(u)$ непрерывные, строго монотонно возрастающие функции $\omega_i : R^+ \to R^+, \omega(0) = 0$.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ - некоторое решение (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$. Вдоль этого решения функционал V представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$. Для этой функции определим верхнюю правостороннюю производную:

$$\frac{dV}{dt}_{(1.1)} = \overline{\lim}_{\Delta t \to 0^+} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

Определение 2.4. Для непрерывного функционала $V(t, \varphi)$ и некоторого числа $c \in R$ определим $V^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C_H : \exists \varphi_n \in C_H, t_n \geq 0 : \quad \varphi_n \to \varphi, \quad V(t_n, \varphi_n) \to c, n \to +\infty\}$.

Теорема 2.1. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R$, такой, что:

$$V(t,\varphi) \geq 0, V(t,0) \equiv 0, \dot{V}(t,\varphi) \leq 0, (t,\varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0)$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$;

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (2.1) неустойчиво. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдется момент $\alpha > 0$ последовательность $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \to 0, n \to \infty\}$, такие, что для решений (1.1) $x^n(t) = x(t, \alpha, \varphi_n)$ верно:

$$\|x^n_{t_n}(\alpha, \varphi_n)\| = \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

при некотором $t = t_n$. Из единственности $x = 0$ следует, что $t_n \to +\infty$. Можно считать, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha, t_n)$.

Из условия $V(t,0) \equiv 0$ следует, что существуют числа $\Delta_n \to 0$, такие, что $V(\alpha, \varphi_n) \leq \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t,\varphi) \leq 0$ получаем, что:

$$V(t, x^n_t(\alpha, \varphi_n)) \leq \Delta_n, t > \alpha \tag{2.2}$$

Определим $\delta_0 = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ из условия 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. Очевидно, что существует последовательность $t^{(1)}_n = t_n(\delta_1) \to +\infty, n \to \infty$, такая, что $\|x^{(n)}_t\| = \delta_1$, $x^{(n)}_t = x_{t^{(1)}_n}(\alpha, \varphi_n)$ и при $t^{(1)}_n \leq t \leq t_n$ выполняется:

$$\delta_1 \leq \|x^n_t\| \leq \varepsilon_0 \tag{*}$$

По лемме 1.1 семейство функций $\{x^{(n)}_t(\alpha, \varphi_n)\}$ предкомпактно в C_{ε_0}, поэтому существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t^{(1)}_n$) и функция $\varphi_{(1)}$, такие, что $x^{(n)}_t \to \varphi_{(1)}$, где $\|\varphi_{(1)}\| = \delta_1$. При этом, в силу (2.2) и условия для производной V имеем: $V(t^{(1)}_n, x^(n)_t(\alpha, \varphi_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ и значит $\varphi_{(1)} \in V^{-1}(\infty, 0)$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t^{(1)}_n$) такая, что $f(t + t^{(1)}_n, \varphi) \to f^*_{(1)}(t, \varphi)$. По теореме 1.1 получаем, что $x^n(t + t^{(1)}_n, \alpha, \varphi_n) \to x^*(t, 0, \varphi_{(1)})$, где $x^*(t, 0, \varphi_{(1)})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*_{(1)}(t, x_t)$.

Но тогда по определению числа δ_1 имеем, что $|x^*(t,0,\varphi_{(1)})| \le \frac{\varepsilon_0}{2}, t \ge 0$ и $|x^*(t,0,\varphi_{(1)})| \to 0, t \to +\infty$. Обозначим: $T_n = t_n - t_n^{(1)}$. Рассмотрим $x^* = x^*(T_n, 0, \varphi_{(1)})$. Если $T_n \le T < +\infty$ для любого $n = 1, 2...$, тогда получаем, что существует T_0, такое, что $x^*_{T_0} = \varphi_{\varepsilon_0}$. Если $T_n \to +\infty$, тогда в силу $(*)$ для каждого $T = const > 0$ $|x^*(T,0,\varphi_{(1)})| \ge \delta_1 > 0$. И то и другое свойство противоречит выбору δ_1. Таким образом получаем устойчивость нулевого решения (1.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 1.2.1 выполняется: $V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|)$, тогда решение $x = 0$ (1.1) равномерно устойчиво.

Введем следующее определение.

Определение 2.5. [1] Пусть $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t,c) \subset C_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_\infty^{-1}(t,c)$,если существует последовательность $\{\varphi_n \in \Gamma, \varphi_n \to \varphi\}$ такая, что: $\lim_{n\to+\infty} V(t+t_n, \varphi_n) = c$.

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, \forall (t,\varphi) \in R \times \Lambda.$$

Допустим, что непрерывная функция $W = W(t,\varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, K – компакт из C_H.

Предположим, что функционал $V(t,\varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset C_H$ есть компактное множество.

Примем, что (f^*, V^*, W^*) есть предельная совокупность, если f^*, V^*, W^* являются предельными к f, V, W для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$. При этом множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ соответствующее (f^*, V^*, W^*) есть $\{(t,\varphi) : V^*(t,\varphi) = c\}$.

Теорема 2.3. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R$, ограниченный и равномерно непрерывный на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset C_H$ есть компакт, и такой, что:

$$0 \le V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|), V(t,0) \equiv 0$$

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, (t,\varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) множество $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0)$ содержит из решений каждого предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ только те, которые асимптотически устойчивы равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$.

3) каждая предельная совокупность (f^*, V^*, W^*) такова, что множество $\{V^*(t,\varphi) = c > 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Пример 2.1

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)(\int\limits_{-r(t)}^{0} x_2^2(t+s) f_1(t, x_1(t+s))ds + 2) - x_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t)f_2(t) - x_2^3(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(0 \le r(t) \le h = const)$$

Допустим, что функция $f_1(t,\varphi_1)$ является ограниченной и непрерывной функцией по (t,φ_1); $f(t,\varphi_1) \ge 0$, причем $f(t,\varphi_1) \to 0, t \to +\infty$ равномерно по $\varphi_1 \in C_H$, функция $f_2(t)$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией по t.

Уравнения, предельные к (2.3) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - x_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t) = f_2^*(t)x_1(t)x_2(t) - x_2^3(t), \end{cases} \tag{2.4}$$

Положим:

$$V(t,\varphi_1) = \varphi_1^2(0) + \int\limits_{-h}^{0} \varphi_1^2(s)ds.$$

Для производной $\dot{V}(t,\varphi_1)$ находим:

$$\dot{V}(t,\varphi_1,\varphi_2) = -2\varphi_1^2(0)(\int\limits_{-r(t)}^{0} \varphi_2^2(s) f_2(t,\varphi_1(s))ds + 2) - 2\varphi_1(0)\varphi_1(-h) +$$
$$\varphi_1^2(0) - \varphi_1^2(-h) \le -2\varphi_1^2(0) \le 0.$$

$W(t,\varphi) = 2\varphi_1^2(0)$. Множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\} \equiv \{\varphi_1(0) = 0\}$. $V^*(t,\varphi) = \varphi_1^2(0) + \int\limits_{-h}^{0} \varphi_1^2(s)ds$. Множество $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0) = \{\varphi_1 = 0\}$.

На Λ_0 система (2.4) принимает вид:

$$\dot{x}_2(t) = -x_2^3(t).$$

Очевидно, что решение $x_1 = x_2 = 0$ предельной системы (2.4) асимптотически устойчиво относительно Λ_0. Множество $\{V^*(t,\varphi) = c > 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\} = 0$.

Таким образом выполнены все условия теоремы 2.3 и, значит, нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ системы (2.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2.4. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R$, такой, что:

$$0 \le V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|), V(t,0) \equiv 0$$
$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, (t,\varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) множество $W^{-1}(\infty, 0)$ содержит из решений каждого предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ только те, которые асимптотически устойчивы равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Докажем вначале равномерную устойчивость нулевого решения $x = 0$.

Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1.1) не является равномерно устойчивым. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдутся последовательности $\{\alpha_n > 0\}, \{\varphi_n : \|\varphi_n\| \to 0, n \to \infty\}$, и $\{T_n\}$ такие, что для решений (1.1) $x^n(t) = x(t, \alpha_n, \varphi_n)$ верно:

$$\|x^n_{\alpha_n+T_n}(\alpha_n, \varphi_n)\| = \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Из единственности $x = 0$ следует, что $\alpha_n + T_n \to +\infty$. Можно считать, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n]$.

В силу дополнительного условия $V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|)$ получаем, что существуют числа $\Delta_n \to 0$, такие, что $V(\alpha_n, \varphi_n) \le \omega(\|\varphi_n\|) \le \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t,\varphi) \le 0$ получаем, что:

$$V(t, x^n_t(\alpha_n, \varphi_n)) \le \Delta_n, t > \alpha_n \qquad (**)$$

Определим $\delta_0 = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ из условия 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. Существует последовательность $t_n^{(1)} = t_n(\delta_1) \to +\infty, n \to \infty$, $t_n^{(1)} \geq 0$ функция $\varphi_{(1)}$, $f^*_{(1)}$ такие, что $x^n_{t_n^{(1)}+\alpha_n} \to \varphi_{(1)}$, $\delta_1 \leq \|x_t\| \leq \varepsilon_0$ для $t \in [t_n^{(1)} + \alpha_n, T_n + \alpha_n)$, где $\|\varphi_{(1)}\| = \delta_1$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{(1)}$) такая, что $f(t + t_n^{(1)} + \alpha_n, \varphi) \to f^*_{(1)}(t, \varphi)$. По теореме 1.1 получаем, что $x^n(t+t_n^{(1)}+\alpha_n, \alpha, \varphi_n) \to x^*(t, 0, \varphi_{(1)})$, где $x^*(t, 0, \varphi_{(1)})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*_{(1)}(t, x_t)$.

Рассмотрим:

$V(t_n^{(1)} + t + \alpha_n, x_{t_n^{(1)}+t+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)) - V(t_n^{(1)} + \alpha_n, x_{t_n^{(1)}+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)) \leq -\int\limits_0^t W(s + t_n^{(1)} + \alpha_n, x_{s+t_n^{(1)}+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n))ds \leq 0.$

В силу (**) получаем, что $\{x^*_t(0, \varphi_{(1)}), t \in R^+\} \subset W^{-1}(\infty, 0)$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 2.1, получаем противоречие условия 2) со (*).

Докажем теперь равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (1.1).

Пусть $\bar{C}_r = \{\varphi : \|\varphi\| \leq r < H\}$ лежит в области равномерной устойчивости. Покажем, что $\bar{C}_r$ содержится в области равномерного притяжения $x = 0$ для (1.1).

Предположим противное, а именно, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, произвольной последовательности $T_k \to +\infty$ существует последовательность $(\alpha_k, \varphi_k) \in R^+ \times \bar{C}_r$, такая, что для решений $x = x(t, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется:

$$\|x_{\alpha_k+T_k}(\alpha_k, \varphi_k)\| = \varepsilon_0.$$

Определим число $\delta_0 = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ из свойства равномерной устойчивости нулевого решения (1.1) $x = 0$. Тогда для всех $\alpha_k \leq t \leq \alpha_k + T_k$ будем иметь:

$$\|x_t(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_0.$$

Положим $\{\psi_k = x_{\beta_k} : \beta_k = \alpha_k + \frac{T_k}{2}\}$. Значит для решений (1.1) $x = x(t + \beta_k, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется:

$$\|x_{t+\beta_k}(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_1 \tag{2.5}$$

для всех $0 \leq t \leq T_k/2$.

Без ограничения общности, можно считать, что $\psi_k \to \psi, k \to +\infty$.

По теореме 1.1 последовательность $x(\beta_k + t, \beta_k, \psi_k)$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$ к решению $y = y(t, 0, \psi)$ уравнения $\dot{y}(t) = f^*(t, x_t)$.

Тогда в силу (2.5) имеем:

$$\|y_t(0, \psi)\| \geq \delta_0 \tag{2.6}$$

для всех $t \geq 0$.

Вдоль решения $x = x(t + \beta_k, \beta_k, \psi_k)$ для $\tau > 0$ имеем:

$V(\beta_k + \tau, x_{\beta_k+\tau}(\beta_k, \psi_k)) - V(\beta_k, x_{\beta_k}(\beta_k, \psi_k))$
$\leq - \int\limits_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k))ds \leq 0.$

Значит для любых $\tau \geq 0, \beta_k$ получаем:

$0 \leq \int\limits_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k))ds \leq m = const.$

Устремляя $k \to \infty$ получаем:

$$0 \leq \int\limits_0^\tau W^*(s, y_s(0, \psi))ds \leq m \tag{2.7}$$.

Следовательно $\int\limits_0^\infty W^*(s, y_s(0, \psi))ds$ сходится и для каждого $\tau \geq 0$:

$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} W^*(s, y_s(0, \psi))ds = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{-\tau}^{\tau} W^*(t + s, y_{t+s}(0, \psi))ds = 0.$

Возьмем произвольную последовательность $t_n \to +\infty$. Без ограничения общности, можно считать, что $f^*(t + t_n, \varphi) \to f^{**}(t, \varphi), W^*(t_n + t, \varphi) \to W^{**}(t, \varphi)$, а $y(t_k + t, 0, \psi)$ сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ к $z(t, 0, \psi^*)$, где $z(t, 0, \psi^*)$ есть решение уравнения $\dot{y}(t) = f^{**}(t, y_t)$, $\psi^* = \lim_{n\to+\infty} y_{t_n}$. В силу (2.6) для каждого $t \in R$ получаем:

$$\|z_t(0, \psi^*)\| \geq \delta_0 > 0 \tag{2.8}$$

Из (2.7) имеем:

$0 \leq \int\limits_{-\tau}^{\tau} W^{**}(s, z_s(0, \psi^*)ds = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\tau}^{\tau} W(t_n + s, y_{s+t_n}(0, \psi))ds = 0.$

Следовательно для каждого $t \in R : W^{**}(t, z_t(0, \psi^*) = 0$. Учитывая (2.8) мы приходим к противоречию с условием 2) теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 2.5. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R, V(t,0) \equiv 0$ такой, что найдется функция β класса Хана, такая, что $\beta(s) > s$ и верно

$$\omega_1(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi)$$

для таких $t \in R^+$ и φ, что $\|\varphi\| < H$ и $\max_{s[-h,0]} |\varphi(s)| \leq \beta(|\varphi(0)|)$, а также

$$V(t,\varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|)$$

для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) $\dot{V}_{(1.1)}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0$ для $t \in R^+$ и φ таких, что $\|\varphi\| < H$ и $V(t,\varphi) > 0$;

3) для каждой предельной пары (f^*, W^*) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, кроме нулевого.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Теоремы 2.1-2.5 есть развитие и обобщение результатов работ [1-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. О притяжении решений неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Функциональный анализ. Межвузовский сборник научных статей. – Ульяновск: УлПИ, 1992. С. 16-23.

2. Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. – Ульяновск: филиал МГУ в г. Ульяновске, 1994, 80 с.

3. Княжище Л.Б., Щеглов В.А. О знакоопределенности функционала Ляпунова и устойчивости одного уравнения с запаздыванием. – Минск, 1994, 32 с.

4. Косов А.А. К теории устойчивости неавтономных систем. – Ленинград, 1995, ВИНИТИ, 11 с.

5. Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т.20, N 4. С.513-518.

6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

УДК 517.929

О СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[6]

С.В. Павликов

Обосновано применение знакопостоянных функционалов Ляпунова в решении задачи о стабилизации управляемой системы с запаздыванием по всем и части переменных.

1. Рассматривается управляемая система, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u), \tag{1.1}$$

где $x_t \in C_H, x(t) \in R^n, u = u(t, x_t) \in U, u(t,0) = 0$, где u есть управляющее воздействие, U – некоторый класс допустимых управлений; $f(t, x_t, u)$ $(f(t,0,0) \equiv 0)$ есть непрерывное отображение, удовлетворяющее в $\Lambda = R^+ \times C_H$ условиям существования и единственности решений (1.1) (принятые обозначения см. в [1]).

Определение 1.1. Управляющее воздействие $u = u^0(t, x_t)$ называется стабилизирующим, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (1.1).

Введем для некоторого $u^0(t, x_t) \in U$ предположение, аналогичное предположениям предкомпактности из [2], и построим семейство предельных уравнений:

$$\{\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t)\}, \tag{1.2}$$

где $f_0^*(t, x_t) = \lim_{t_n \to +\infty} f[t_n + t, x_t]$, $\;f[t, x_t] = f(t, x_t, u^0(t, x_t))$.

Поставленную задачу о стабилизации движений управляемых систем с запаздыванием решим на основе метода предельных

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-15-96150, № 02-01-06162, № 02-01-00877).

уравнений с использованием функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

2. Используя теоремы об асимптотической устойчивости из [2,3] можно получить следующие теоремы.

Теорема 2.1. Предположим, что существуют функционал Ляпунова $V(t,\varphi) : R^+ \times C_H \to R^+$ и управление $u^0(t,x_t) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\omega_1(|\varphi(0)|) \le V(t,\varphi), \dot V(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0 \ \forall (t,\varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) для каждой предельной пары (f_0^*, W^*) и множества $V_\infty^{-1}(t,c)$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const \ge 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot x(t) = f_0^*(t,x_t)$, кроме нулевого $x = 0$.

Тогда $u^0(t,x_t)$ есть стабилизирующее управление.

Теорема 2.2. Предположим, что:

1) выполняется условие 1) теоремы 2.1;

2) для каждого значения $c_0 > 0$ существуют предельная пара (f_0^*, W^*) с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$, такие, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\} \bigcap$
$\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot x(t) = f_0^*(t,x_t)$.

Тогда $u^0(t,x_t)$ есть стабилизирующее управление. При этом решение $x = 0$ уравнения (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по φ.

Теорема 2.3. Предположим, что существуют функционал Ляпунова $V(t,\varphi) : R^+ \times C_H \to R^+$ и управление $u^0(t,x_t) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\emptyset_1(|\varphi(0)|) \le V(t,\varphi) \le \omega_2(\|\varphi\|), \dot V(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0 \ \forall (t,\varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) для любой предельной пары (f_0^*, W^*) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot x(t) = f_0^*(t,x_t)$, кроме нулевого $x = 0$.

Тогда $u^0(t,x_t)$ есть стабилизирующее управление. При этом решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2.4. Предположим, что существуют функционал Ляпунова $V(t,\varphi) : R^+ \times C_H \to R^+$ и управление $u^0(t,x_t) \in U$, такие, что выполняются условия:

1)
$$0 \le V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|), V(t,0) \equiv 0$$
$$\dot V(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, (t,\varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) множество $W^{-1}(\infty, 0)$ содержит из решений каждого предельного уравнения $\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t)$ только те, которые асимптотически устойчивы равномерно по $\{\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t)\}$.

Тогда $u^0(t, x_t)$ есть стабилизирующее управление. При этом решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Рассмотрим уравнение (1.1) с правой частью определенной на $R^+ \times \Lambda \times U$, где $\Lambda = C_H^{(m)} \times C^{(p)}$:

$$\dot{x}(t) = (\dot{y}(t), \dot{z}(t)) = f(t, x_t, u) \tag{3.1}$$

Можно ввести следующее определение y–стабилизирующего управления, развивающее соответствующее определение из [4].

Определение 3.1. Управляющее воздействие $u = u^0(t, x_t)$ называется y-стабилизирующим, если оно обеспечивает асимптотическую y-устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (2.3).

Используя результаты работ [2,5], можно получить следующие теоремы.

Теорема 3.1. Предположим, что существует функционал Ляпунова $V(t, \varphi) : R^+ \times \Lambda \rightarrow R^+$ и управление $u^0(t, x_t) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) существует окрестность N точки $x = 0$, из которой решения уравнения (3.1) ограничены по z;

2)

$$V(t, 0) \equiv 0, V(t, \varphi) \geq \omega_1(|\varphi_{(y)}(0)|), \dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$$

для всех $t \in R^+, \varphi \in \bar{C}_{\delta_1}^{(m)} \times \bar{C}_{\delta_2}^{(p)}$,

3) для каждой предельной пары (f_0^*, W^*) с множеством $V_\infty^{-1}(t, c)$, множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = const \geq 0\} \bigcap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t)$, кроме $x(t) = (y(t), z(t))$, таких, что $y(t) = 0$.

Тогда $u^0(t, x_t)$ есть y-стабилизирующее управление.

Теорема 3.2. Предположим, что:

1) выполняются условия 1) и 2) теоремы 3.1;

2) существуют предельная пара (f_0^*, W^*) с множеством $V_\infty^{-1}(t, c)$, такие, что для каждого значения $c_0 > 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c =$

$c_0 = const > 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t)$.

Тогда $u^0(t, x_t)$ есть y-стабилизирующее управление, при этом имеет место асимптотическая y-устойчивость равномерная по φ.

Теорема 3.3. Предположим, что существует функционал Ляпунова $V(t,\varphi) \; : \; R^+ \times \Lambda \to R^+$ и управление $u^0(t,x_t) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) существует окрестность N точки $x = 0$, из которой решения уравнения (3.1) равномерно ограничены по z;

2) функционал V является ограниченным и равномерно непрерывным на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset \Lambda$ есть компакт, и такой, что:

$$\omega_1(|\varphi_{(y)}(0)|) \le V(t,\varphi) \le \omega_2(\|\varphi\|), V(t,0) \equiv 0,$$

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, (t,\varphi) \in R^+ \times \Lambda;$$

3) каждая предельная совокупность (f_0^*, V^*, W^*) такова, что множество $\{V^*(t,\varphi) = c > 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = f_0^*(t, x_t)$.

Тогда $u^0(t, x_t)$ есть y-стабилизирующее управление. при этом имеет место равномерная асимптотическая y-устойчивость.

Аналогично получаются теоремы о стабилизации (3.1) методом знакопостоянных функций.

Пример 3.1. Рассмотрим управляемую механическую систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x}(t) = u \tag{3.2}$$

Определим управление вида: $u = f\dot{x}(t) + cx(t - r(t))$, обеспечивающее стабилизацию положения $\dot{x} = x = 0$.

Подставляя u имеем уравнение:

$$\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + cx(t) + c\int\limits_{-r(t)}^{0} \dot{x}(t+s)ds = 0 \tag{3.3}$$

Можно получить, что при условии $f \ge h\mu_0, \mu_0 > c$, где c, f есть постоянные, управление $u = f\dot{x}(t) + cx(t - r(t))$ есть стабилизирующее управление, при этом нулевое решение (3.2) равномерно асимптотически устойчиво.

Пример 3.2. Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями и n обобщенными координатами $q_1, ..., q_n$, описываемую уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = u_i \tag{3.4}$$

где $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ есть кинетическая энергия системы.

а) определим управление u_i в виде: $u_i = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j(t - r_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t)$, где функции $r_{ij}(t)$ являются ограниченными: $0 < r_{ij} \leq h$, и равномерно непрерывными при $t \in R^+$, так чтобы положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (3.4) было равномерно асимптотически устойчивым.

Предельная к (3.4) система имеет аналогичный вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(q_j(t) - \int\limits_{-r_{ij}^*(t)}^{0} \dot{q}_j(t+s)ds\right) - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t) \tag{3.5}$$

Предполагаем, что $\|f\|, \|c\|$ – положительно определенные матрицы, μ – минимальное собственное значение матрицы $\|f\|$, при этом:

$$c_0 = \max_{i,j}|c_{ij}| < \frac{\mu}{hn}$$

Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$V(t, \dot{q}_t, q_t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}q_iq_j + \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s}^{0}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t+u)\dot{q}_i(t+u)duds.$

Несложно видеть, что он определенно–положителен, допускает бесконечно малый высший предел.

Для производной $\dot{V}$ получаем:

$\dot{V}(t, \dot{q}_t, q_t) \leq -\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) + \int\limits_{-h}^{0}\sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}||\dot{q}_i(t)||\dot{q}_j(t+s)|ds +$

$+\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\ (\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) - \dot{q}_i(t+s)\dot{q}_j(t+s))ds =$

$-\int_{-h}^{0}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{f_{ij}}{2h}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) - \sum_{i,j=1}^{n}|c_{ij}||\dot{q}_i(t)||\dot{q}_j(t+s)| + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{f_{ij}}{2h}\dot{q}_j(t+s)$

$\dot{q}_j(t+s))ds \leq -\int_{-h}^{0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{2h}(\dot{q}_i^2(t) + \dot{q}_i^2(t+s)) - \sum_{i,j=1}^{n}|c_{ij}|\dot{q}_i(t)||$

$\dot{q}_j(t+s)|ds \leq -\int\limits_{-h}^{0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu}{h} - c_0 n)(\dot{q}_i^2(t) + \dot{q}_i^2(t+s))ds \leq 0.$

Положим

$W(t, q(t+s), \dot{q}(t+s) = -\int\limits_{-h}^{0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu}{h} - c_0 n)(\dot{q}_i^2(t) + \dot{q}_i^2(t+s))ds.$

Тогда множество $\{W^*(t, q(t+s), \dot{q}(t+s) = 0\} \equiv \{\dot{q} = 0\}$.

Подставляем значение $\dot{q} = 0$ в уравнение (3.5) получаем, что множество $\{W^*(t, q(t+s), \dot{q}(t+s) = 0\}$ не содержит решений уравнения (3.5), кроме $\dot{q} = q = 0$.

Используя теорему 2.3 получаем, что управление $u_i = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ $q_j(t - r_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t)$ такое, что нулевое решение (2.6) $\dot{q} = q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

б) Рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы (3.4) по скоростям $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$ и координатам $q_1, ..., q_m$ $(m < n)$ в предположении, что координаты $q_{m+1}, ..., q_n$ – угловые $(mod 2\pi)$. В этом случае управление u можно определить в виде:

$u_i = -\sum_{j=1}^{m} c_{ij}q_j(t - r_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t),$

где функции $r_{ij}(t)$ являются ограниченными: $0 < r_{ij} \leq h$, и равномерно непрерывными при $t \in R^+$.

Обозначим $(q_1, ..., q_m) = q^1$.

Предельная к (3.4) система имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(q_j(t) - \int\limits_{-r_{ij}^*(t)}^{0} \dot{q}_j(t+s)ds) - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t) \quad (3.6)$$

Предполагаем, что $\|f\|, \|c\|$ – положительно определенные матрицы, μ – минимальное собственное значение матрицы $\|f\|$, при этом

$$c_0 = \max_{i,j}|c_{ij}| < \frac{\mu}{hn}$$

Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$V = T + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}q_i q_j + \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s}^{0}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t+u)\dot{q}_i(t+u)duds.$

Несложно видеть, что для производной $\dot{V}$ получаем:

$\dot{V} \leq -\int\limits_{-h}^{0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu}{h} - c_0 n)(\dot{q}_i^2(t) + \dot{q}_i^2(t+s))ds \leq 0.$

Положим

$W(t,q(t+s),\dot q(t+s) = -\int\limits_{-h}^{0}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu}{2h}-\frac{c_0 n}{2})(\dot q_i^2(t)+\dot q_i^2(t+s))ds.$

Тогда множество $\{W^*(t,q(t+s),\dot q(t+s)=0\}\equiv\{\dot q=0\}$.

Множество $\{V^*(t,\varphi) = c = const > 0\} = \{\dot q = const, q_1 = const, ..., q_m = const\}$.

Множество $\{V^*(t,\varphi) = c = const > 0\}\bigcap\{W^*(t,q(t+s),\dot q(t+s) = 0\} = \{\dot q = 0, q_1 = const > 0, ..., q_m = const > 0\}$ не содержит решений уравнения (3.6). По теореме 3.2. получаем, что u есть y-стабилизирующее управление для уравнения (3.4), где $y=(\dot q, q^1)$, при этом нулевое решение (3.4) $\dot q = q = 0$ равномерно асимптотически y-устойчиво.

Пример 3.3. Задача о стабилизации одноосной ориентации твердого тела при помощи управляющих моментов.

Рассматривается твердое тело, имеющего неподвижную точку O. Пусть $OXYZ$ – инерциальная система координат, $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с твердым телом, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения. Движение такого тела можно описать в углах Эйлера уравнениями Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi})-\frac{\partial T}{\partial\psi}=u_\psi\\
&\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta})-\frac{\partial T}{\partial\theta}=u_\theta\\
&\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi})-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=u_\varphi
\end{aligned}\tag{3.7}$$

$T = \frac{1}{2}(A(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)^2+B(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)^2+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2)$.

$\Pi = -a\sin\varphi\cos\theta,\ a>0.$

Определим управления $u_\psi, u_\theta, u_\varphi$ таким образом, чтобы обеспечить стабилизацию оси Ox вдоль оси OZ, т.е. в случае $\varphi=\frac{\pi}{2}, \theta=\frac{\pi}{2}$. Управления возьмем в виде:

$u_\psi = 0$

$u_\theta = -k_{11}\dot\theta-k_{12}\dot\psi+a\sin\varphi(t-r_1(t))\cos(\theta(t-r_2(t))$

$u_\varphi = -k_{21}\dot\theta-k_{22}\dot\psi+a\cos\varphi(t-r_1(t))\sin(\theta(t-r_2(t)).$

Здесь $\|k\|_{ij}$ – положительно определенная матрица; μ – минимальное собственное значение этой матрицы; $r_i(t)$ являются равномерно непрерывными функциями при $t \in R^+$, при этом: $0 < r_i(t) \le h = const$.

Предположим, что выполняется: $a < \frac{\mu}{2h}$.

Предельные к (3.7) уравнения имеют аналогичный вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -k_{11}\dot{\theta} - k_{12}\dot{\psi} + a\sin\varphi(t - r_1^*(t))\cos(\theta(t - r_2^*(t)) \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -k_{21}\dot{\theta} - k_{22}\dot{\psi} + a\cos\varphi(t - r_1(t))\sin(\theta(t - r_2(t))$$

Рассмотрим функционал Ляпунова:

$V = T + a(1 - \sin\varphi\sin\theta) + \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s}^{0}(k_{11}\dot{\theta}(t+u) + 2k_{12}\dot{\varphi}(t+u)\dot{\theta}(t+u) + k_{22}\dot{\varphi}(t+u))duds.$

Учитываем, что:

$\sin(\varphi(t - r_1(t)))\cos(\theta(t - r_2(t))) = \sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi(\int\limits_{t-r_2(t)}^{t}\sin\theta(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau) - \cos(\theta - r_2(t))(\int\limits_{t-r_1(t)}^{t}\cos\varphi(\tau)\dot{\varphi}(\tau)d\tau).$

$\cos(\varphi(t - r_1(t)))\sin(\theta(t - r_2(t))) = \cos\varphi\sin\theta - \cos\varphi(\int\limits_{t-r_2(t)}^{t}\cos\theta(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau) + \sin(\theta - r_2(t))(\int\limits_{t-r_1(t)}^{t}\sin\varphi(\tau)\dot{\varphi}(\tau)d\tau).$

Тогда для производной функционала находим:

$\dot{V} \le -\int\limits_{-h}^{0}(\frac{\mu}{2h} - 2|a|((\dot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^2(t+s) + \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{\varphi}^2(t+s)ds \le 0.$

Положим $W = \int\limits_{-h}^{0}(\frac{\mu}{2h} - 2|a|((\dot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^2(t+s) + \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{\varphi}^2(t+s)ds$

Тогда множество $\{W^* = 0\} = \{\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0\}$ содержит из решений предельного уравнения (3.8) только $\dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0, \varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$.

По теореме 3.3 получаем стабилизацию оси Ox вдоль оси OZ, т.е. асимптотическую устойчивость положения: $\dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0, \varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$.

Полученные в работе результаты развивают результаты работ [4,6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчиовсти функционально- дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием.// Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. 2002 Вып.2(12) С.30-39

2. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения.// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4, С.435-440

3. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости.// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34, №7, С.876-885

4. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных.- М.: Наука, 1987. - 253 с.

5. Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально- дифференциального уравнения.// ПММ. 1999. Т.63, №1, С.3-12

6. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием.// Дифференц. уравнения. 1965. Т.1, №5, С.605-618

УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА БЕЙЛИ ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ[7]

О.А. Перегудова

Известно [1], что классический подход Ф.Н.Бейли к решению задач устойчивости больших динамических систем основан на декомпозиции системы и построении для каждой изолированной подсистемы функции Ляпунова-Красовского [4]. Эти функции принимаются в качестве компонент вектор-функции Ляпунова (ВФЛ), производная которой оценивается сверху некоторой линейной стационарной функцией. В результате получается линейная автономная система сравнения (СС) с позитивной гурвицевой матрицей. Основное достоинство метода — простота построения ВФЛ и СС. Однако платой за простоту является существенный недостаток — "слишком"достаточные условия устойчивости нулевого решения исходной системы, обусловленные грубостью оценок при построении матрицы Бейли. В настоящей работе ослабляются требования, налагаемые на матрицу Бейли, в частности, свойство гурвицевости заменяется условием устойчивости системы сравнения, а сама матрица предполагается нестационарной. С использованием результатов работы [5] выводятся условия асимптотической устойчивости нулевого решения исходной динамической системы.

Рассмотрим управляемую динамическую систему вида [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_i) + D_i u_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ &u_i = \sum_{j=1}^{m} B_{ij} y_j, \qquad y_i = H_i x_i, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь X_i— непрерывные по (t, x_i) и дифференцируемые по x_i функции с ограниченными $||\partial X_i/\partial x_i||$, $X_i(t,0) \equiv 0$, x_i— векторы состояний размерности n_i, u_i— входные векторы размерности k_i, y_i— выходные векторы размерности r_i подсистем, B_{ij}, D_i, H_i — матрицы соответствующих размерностей ($B_{ii} = 0$), $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$.

[7]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №02-01-00877, №00-15-96150).

Систему (1) можно переписать в форме:

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_i) + \sum_{j=1(j\neq i)}^{m} C_{ij}x_j, \qquad i = 1, ..., m, \tag{2}$$

где $x_i \in R^{n_i}$, $C_{ij} = D_i B_{ij} H_j$ — матрицы, характеризующие взаимосвязи между подсистемами

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_i). \tag{3}$$

Будем предполагать, что для каждой из подсистем (3) построена функция Ляпунова $v^i(t, x_i)$, $(i = 1, ..., m)$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{array}{l} c_{i1}||x_i||^2 \leq v^i(t, x_i) \leq c_{i2}||x_i||^2, \\ \dot{v}^i(t, x_i) \leq (-c_{i3} + c_i(t))||x_i||^2, \\ \left|\left|\frac{\partial v^i}{\partial x_i}\right|\right| \leq c_{i4}||x_i||, \qquad x_i \in R^{n_i}, \end{array} \tag{4}$$

где c_{ij}— некоторые положительные постоянные $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., 4)$; $c_i(t)$ — некоторые непрерывные ограниченные функции $t \geq t_0$ $(i = 1, ..., m)$. Обозначим

$$c^+(t) = \begin{cases} c(t), & c(t) \geq 0 \\ 0, & c(t) < 0, \end{cases} \qquad c^-(t) = \begin{cases} -c(t), & c(t) < 0 \\ 0, & c(t) \geq 0. \end{cases}$$

Построим ВФЛ

$$v(t, x) = (v^1(t, x_1), ..., v^m(t, x_m))^T, \tag{5}$$

производная которой в силу полной системы (2) мажорируется линейной функцией от v:

$$\frac{dv(t, x)}{dt} \leq P(t)v(t, x), \qquad \forall x \in R^n, t \geq 0$$

с матрицей $P = ||p_{ij}||$ вида :

$$p_{ii} = -\frac{c_{i3}}{2c_{i2}} + \frac{c_i^+(t)}{c_{i1}}; \qquad p_{ij} = \frac{c_{i4}^2 \sum\limits_{k=1(k\neq i)}^{m} ||C_{ik}||^2}{2c_{i3}c_{j1}}, \quad j \neq i. \tag{6}$$

Действительно, найдем оценку производной от $v^i(t, x)$ в силу системы (2) с учетом оценок (4):

$$\dot{v}^i(t, x) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x_i} \cdot X_i(t, x_i) + \frac{\partial v^i}{\partial x_i} \sum_{j=1(j\neq i)}^{m} C_{ij}x_j \leq$$

$$\leq -c_{i3}||x_i||^2 + c_i(t)||x_i||^2 + c_{i4}\left(\sum_{j=1(j\neq i)}^{m} ||C_{ij}|| \cdot ||x_j||\right) \cdot ||x_i||$$

В силу алгебраического неравенства $-az^2+bz \leq -\frac{a}{2}z^2+\frac{b^2}{2a}$, имеющего место при любых $a > 0$, $b \geq 0$, $z \in R^1$, выполняется следующее неравенство

$$\dot{v}^i(t,x) \leq -\frac{c_{i3}}{2}||x_i||^2 + \frac{c_{i4}^2}{2c_{i3}} \sum_{j=1}^{m} ||C_{ij}||^2 \sum_{j=1(j\neq i)}^{m} ||x_j||^2 + c_i(t)||x_i||^2 \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m} p_{ij} v^j(t,x_j) - c_i^-(t)||x_i||^2.$$

Предположим, что матрица $P = P(t)$ такова, что максимальное собственное значение $\mu_{max} = \mu_{max}(t)$ матрицы $P^H(t) = \frac{1}{2}[P(t) + P^T(t)]$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_0^t \mu_{max}(s)ds < +\infty.$$

Тогда нулевое решение $u = 0$ системы сравнения

$$\dot{u} = P(t)u \tag{7}$$

будет устойчиво, что следует из неравенства Важевского [3]:

$$||u(t_0)|| \exp \int_{t_0}^{t} \mu_{min}(s)ds \leq ||u(t)|| \leq ||u(t_0)|| \exp \int_{t_0}^{t} \mu_{max}(s)ds, \quad \forall t \geq t_0.$$

И условие асимптотической устойчивости нулевого решения $x = 0$ исходной системы (2) можно записать в виде [5]: $\limsup\limits_{t\to+\infty} c(t) \neq 0$.

Следует заметить, что неравенство Важевского справедливо, если $||\cdot||$— сферическая (евклидова) норма вектора. В общем же случае имеет место следующая теорема [1]

Теорема (Ч.Дезоер, М.Видьясагар)

Пусть $||\cdot||_i$— норма в R^n и $\mu_i(P)$— соответствующая логарифмическая норма матрицы $n \times n$.

Тогда для всех $t \geq t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$||u(t_0)||_i \exp \int_{t_0}^{t} -\mu_i[-P(\tau)]d\tau \leq ||u(t)||_i \leq ||u(t_0)||_i \exp \int_{t_0}^{t} \mu_i[P(\tau)]d\tau. \tag{8}$$

По определению логарифмической нормы матрицы A

$$\mu(A) = \lim_{h \to +0} \frac{||E + hA|| - 1}{h}.$$

Пример 1. Рассмотрим неавтономную линейную систему ОДУ вида:

$$\dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}d_{1j}(t) + b_{ij}d_{2j}(t)\}x_j, \qquad i = 1, ..., n, \tag{9}$$

где a_{ij} и b_{ij}— действительные постоянные и $d_{1j} : R^+ \to R$ и $d_{2j} : R^+ \to R$— непрерывные ограниченные функции. Предположим также, что $a_{ii} > 0$, $\forall i = 1, ..., n$ и $d_{1j} > 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall j = 1, ..., n$, будем считать, что $\min\limits_{t \geq 0} d_{1i}(t) = 1$, $\forall i = 1, ..., n$.

Изолированные подсистемы будут иметь вид

$$\dot{x}_i = -\{a_{ii}d_{1i}(t) + b_{ii}d_{2i}(t)\}x_i, \qquad (i = 1, ..., n). \tag{10}$$

Для каждой из этих подсистем возьмем функцию Ляпунова $v^i(x_i) = x_i^2$, $(i = 1, ..., n)$.

Тогда производная от $v^i(x_i)$ в силу соответствующей изолированной подсистемы будет удовлетворять неравенству:

$$\dot{v}^i(t, x_i) \leq -2a_{ii}x_i^2 - 2b_{ii}d_{2i}(t)x_i^2.$$

Составим вектор-функцию Ляпунова $v = v(x) : v(x) = (v^1(x_1), ..., v^n(x_n))^T$.

Тогда производную от v в силу полной системы можно оценить сверху линейной функцией от v

$$\frac{dv}{dt} \leq P(t)v,$$

где матрица $P = ||p_{ij}||$ такова : $p_{ii} = -a_{ii} + [2b_{ii}d_{2i}(t)]^+$, $p_{ij} = \sum\limits_{k=1 (k \neq i)}^{n} |a_{ik}d_{1k}(t) + b_{ik}d_{2k}(t)|^2$, $(i \neq j)$. Тогда если максимальное собственное значение $\lambda_{max}(t)$ матрицы $P^H(t) = \frac{1}{2}(P(t) + P^T(t))$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \lambda_{max}(s)ds < +\infty$, то нулевое решение $u = 0$ системы сравнения (7) будет устойчиво, а условие асимптотической устойчивости можно записать в виде [5]:

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t \lambda_{max}(s)ds < +\infty, \qquad \limsup_{t\to+\infty} [b_{ii}d_{2i}(t)]^- \neq 0, \qquad \forall i = 1, ..., n. \tag{11}$$

Аналогично [1] можно построить матрицу P, позволяющую точнее оценивать перекрестные связи между подсистемами ("дифференциально"), по сравнению с предыдущей матрицей (6), где они оцениваются "интегрально".

Для каждого $j \neq i$

$$\beta_{ij}||x_i|| \cdot ||x_j|| \leq \alpha_i^j ||x_i||^2 + \frac{\beta_{ij}^2}{4\alpha_i^j}||x_j||^2,$$

где $\beta_{ij} = c_{i4} \cdot ||C_{ij}||$, $\alpha_i^j > 0$— постоянные, подлежащие доопределению.

$$p_{ii} = -\frac{(c_{i3} - c_i(t) - \sum\limits_{j=1 (j\neq i)}^{m} \alpha_i^j)}{c_{i2}}, \quad p_{ij} = \frac{\beta_{ij}^2}{4\alpha_i^j c_{j1}} \quad (j \neq i). \tag{12}$$

Пример 2. Исследуем на асимптотическую устойчивость положение равновесия $x_i = x_i^* > 0, \dot{x}_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$ (предположив, что оно существует) неавтономной системы дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра [2]:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(x_j - x_j^*), \qquad (i = 1, ..., n), \tag{13}$$

где $a_{ij}(t)$— некоторые непрерывные ограниченные функции $t \geq 0$.

Сделав замену $y_i = x_i - x_i^*$ $(i = 1, ..., n)$, запишем уравнения возмущенного движения:

$$\dot{y}_i = (y_i + x_i^*) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j, \qquad (i = 1, ..., n), \tag{14}$$

Перепишем систему (14) в виде:

$$\dot{y}_i = a_{ii}(t)y_i(x_i^* + y_i) + \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} x_i^* a_{ij}(t)(1+y_i)y_j, \qquad (i=1,...,n). \quad (15)$$

Тогда линейное приближение к системе (15):

$$\dot{y}_i = x_i^* a_{ii}(t)y_i + \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} x_i^* a_{ij}(t)y_j, \qquad (i=1,...,n). \quad (16)$$

Пусть $v(y) = (v^1(y),...,v^n(y))^T$— ВФЛ для системы (16) с компонентами $v^i(y) = y_i^2$, $(i = 1,...,n)$. Производная от $v^i(y)$ в силу изолированной подсистемы

$$\dot{y}_i = x_i^* a_{ii}(t)y_i$$

будет иметь вид

$$\dot{v}^i(t,y_i) = 2x_i^* a_{ii}(t)y_i^2 = 2x_i^* a_{ii}(t)v^i$$

Тогда производная от v^i в силу полной системы (16) будет определяться следующим равенством

$$\dot{v}^i(t,y) = 2x_i^* a_{ii}(t)v^i(y_i) + 2x_i^* \cdot \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)y_j y_i.$$

Для каждого $j \neq i$ оценим слагаемое

$$2x_i^* a_{ij}(t)y_i y_j \le \alpha_i^j (y_i)^2 + \frac{x_i^{*2}|a_{ij}(t)|^2}{\alpha_i^j} y_j^2, \qquad \alpha_i^j = const > 0.$$

Тогда матрица $P = ||p_{ij}||$ может быть представлена в виде

$$p_{ii} = 2x_i^* a_{ii}(t) + \sum_{j\neq i} \alpha_i^j; \qquad p_{ij} = \frac{x_i^{*2}|a_{ij}(t)|^2}{\alpha_i^j}, (j \neq i).$$

Нулевое решение $u = 0$ системы сравнения

$$\dot{u} = P(t)u$$

будет равномерно устойчиво, если $\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t_0}^{t} \mu_\infty(P(t_1))dt_1 \le \mu$; $\mu \in (0,+\infty)$, μ не зависит от t_0, где $\mu_\infty(P)$— некоторая логарифмическая норма матрицы P. Условие равномерного притяжения решений системы (16) можно записать в виде [5]: множество

$$\{(y_i - \frac{x_i^* a_{ij}^*(t)}{\alpha_i^j} y_j)^2 = 0, \quad \forall i \neq j\}$$

не содержит решений предельной системы

$$\dot{y}_i = x_i^* a_{ii}^*(t) y_i + \sum_{j \neq i} x_i^* a_{ij}^*(t) y_j, \quad (i = 1, ...n),$$

$(a_{ij}^*(t) = \lim\limits_{t_n \to \infty} a_{ij}(t + t_n))$, кроме нулевого $y_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$.

Тогда нулевое решение $y_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$ системы линейного приближения (16) будет экспоненциально устойчиво (для линейных систем равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной устойчивости), и можно применить теорему об устойчивости по линейному приближению, согласно которой нулевое решение $y_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$ системы (14) будет асимптотически устойчиво в малом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987. — 312с.

2. Пых Ю.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра// ПММ. Том 41, 1977. С.262-270.

3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. — 447с.

4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. 212с.

5. Перегудова О.А. О применении формулы В.М.Алексеева вариации параметров в методе векторных функций Ляпунова // Ученые записки УлГУ. Сер. Фунд. пробл. матем. и мех./ Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. Вып. 1(10). Ульяновск: УлГУ. 2001. С.61-66.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МОНОТОННОГО ПРОЦЕССА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[8]

Ю.Г. Савинов

В работе получена оценка вероятностей больших уклонений для монотонного дифференцируемого процесса специального вида из [1]. Кроме этого получены оценки вероятностей пересечения криволинейной границы монотонным дифференцируемым процессом, обобщающие аналогичные оценки для случая с постоянной границей из [1].

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ задан стандартный винеровский процесс $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Для некоторой константы $a > 0$ рассмотрим неубывающий дифференцируемый процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ с

$$X_t = \int\limits_0^t \mathrm{I}\left(W_s > a\right) ds, \tag{1}$$

где $I(\cdot)$ – индикаторная функция. Пусть $\phi(t)$ такова, что $\forall\ t \geq 0$ $\phi(t) \geq 0$, $\phi(t) \uparrow 1$ при $t \to \infty$. Верна следующая

Теорема. *Для всех* $t > 0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0<s\leq t} \frac{X_s}{s} > \phi(t)\right) \leq \sqrt{1-\phi(t)}. \tag{2}$$

Доказательство теоремы.

С помощью замены времени получаем

$$\sup_{0<s\leq t} \frac{X_s}{s} = \sup_{0<s\leq t} \frac{\int\limits_0^s \mathrm{I}\left(W_u > a\right) du}{s} = \sup_{0<s\leq t} \frac{s\int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{s}}\right) du}{s} =$$

$$= \sup_{0<s\leq t} \int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{s}}\right) du \leq \sup_{0<s\leq t} \int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > 0\right) du,$$

[8]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 01-01-00735.

где $\widehat{W}_u = \frac{1}{\sqrt{t}} W_{ut}$. Процесс $\widehat{W} = (\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ является винеровским (см., например, Теорему II.3.12 в [2]).

Используя закон арксинуса (см. например, Теорему III.5.1 в [3]) из последнего неравенства имеем $\forall\, t > 0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0<s\leq t} \frac{X_s}{s} > \phi(t)\right) \leq \mathrm{P}\left(\int_0^1 \mathrm{I}(\widehat{W}_s > 0)ds > \phi(t)\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\phi(t)} \leq \sqrt{1 - \phi(t)}.$$

Теорема доказана.

Для процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ получены оценки вероятности пребывания ниже неотрицательной границы $\phi(t)$ такой, что $\forall t \geq 0$ $\phi(t) \leq t$, $\frac{\phi(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$, $\phi(t) \geq 1$ при достаточно больших t. Верна следующая

Теорема. *Существуют такие положительные константы* $c_1 = c_1(a)$ *и* $c_2 = c_2(a)$, *момент времени* $t_0 = t_0(a)$, *что для всех* $t \geq t_0$

$$c_1 \sqrt{\frac{\phi(t)}{t}} \leq P(X_t < \phi(t)) \leq c_2 \sqrt{\frac{\phi(t)}{t}}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество

$$A_t = \left\{ \int_0^t \mathrm{I}\left(W_s > a\right) ds < \phi(t) \right\}.$$

Используя замену времени, получаем

$$A_t = \left\{ \int_0^1 \mathrm{I}\left(W_{u\cdot t} > a\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} = \left\{ \int_0^1 \mathrm{I}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} W_{u\cdot t} > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\}. \tag{4}$$

Обозначим $\widehat{W}_u = \frac{1}{\sqrt{t}} W_{ut}$. Процесс $\widehat{W} = (\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ также является винеровским (см., например, Теорему II.3.12 в [2]). Введем момент остановки

$$\sigma = \sigma_x = \inf\left\{ s : s > 0, \widehat{W}_s = x = \frac{a}{\sqrt{t}} \right\}. \tag{5}$$

Заметим, что $\mathrm{P}\{\sigma < \infty\} = 1$ и $\widehat{W}_\sigma = \frac{a}{\sqrt{t}}$ P-п.н. (см.(4)). Применяя случайную замену времени, получаем (см., например, Теорему II.5.5 в [2]), что процесс $\overline{W} = (\overline{W}_u)_{u\geq 0}$ с

$$\overline{W}_u = \widehat{W}_{u+\sigma} - \frac{a}{\sqrt{t}} \tag{6}$$

является винеровским относительно $(\overline{\mathbf{F}}, \mathrm{P})$, $\overline{\mathbf{F}} = (\overline{\mathcal{F}}_u)_{u\geq 0}$ с $\overline{\mathcal{F}}_u = \mathcal{F}_{u+\sigma}$. Из (4)-(6) получаем

$$A_t = \left\{ \int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} = \left\{ \int\limits_\sigma^{\sigma+1-\sigma} \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u - \widehat{W}_\sigma > 0\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} \tag{7}$$

$$= \left\{ \int\limits_0^{1-\sigma} \mathrm{I}\left(\widehat{W}_{u+\sigma} - \widehat{W}_\sigma > 0\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} = \left\{ \int\limits_0^{1-\sigma} \mathrm{I}\left(\overline{W}_u > 0\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\}. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$A_t = \left\{ \int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} \supset \left\{ \int\limits_0^1 \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > 0\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\}.$$

Применяя закон арксинуса (см. например, Теорему III.5.1 в [3]) получим неравенство:

$$\mathrm{P}\{A_t\} \geq \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}} \geq c_1\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}},$$

где константа $c_1 = \frac{2}{\pi}$. Нижняя оценка в (2) установлена. Докажем теперь верхнюю оценку в (2). Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Из (7) следует, что

$$\mathrm{P}\{A_t\} \leq \mathrm{P}\left\{ \int\limits_\sigma^{\sigma+(1-\varepsilon)} \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} + \mathrm{P}\{\sigma > \varepsilon\}. \tag{9}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (9). Из (8) и закона арксинуса следует, что

$$\mathrm{P}\left\{ \int\limits_\sigma^{\sigma+(1-\varepsilon)} \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{ \int\limits_0^{1-\varepsilon} \mathrm{I}\left(\overline{W}_u > 0\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\phi(t)}{t(1-\varepsilon)}}. \tag{10}$$

Из (10) получаем с константой $d_1 = d_1(\varepsilon) = \frac{5}{2\pi\sqrt{1-\varepsilon}}$, что

$$\mathrm{P}\left\{ \int\limits_{\sigma}^{\sigma+(1-\varepsilon)} \mathrm{I}\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{\phi(t)}{t} \right\} \leq d_1 \sqrt{\frac{\phi(t)}{t}}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (9). Заметим, что из определения σ (4) следует (см., например, Теорему II.3.12 в [2])

$$\mathrm{P}\left\{\sigma_x \leq \varepsilon\right\} = \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds.$$

Применяя замену времени, получаем с константой $d_2 = d_2(a,\varepsilon) = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\mathrm{P}\left\{\sigma > \varepsilon\right\} = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds = \int\limits_{\varepsilon t a^{-2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2u}\right\} du \leq \frac{d_2}{\sqrt{t}}. \tag{12}$$

Выбирая $c_2 = c_2(a,\varepsilon) = d_1 + d_2$ из (9), (11), (12) и условий на $\phi(t)$ получим, что существует момент времени $t_0 = t_0(a)$, что при $t \geq t_0$

$$\mathrm{P}\left\{A_t\right\} \leq d_1\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}} + \frac{d_2}{\sqrt{t}} \leq d_1\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}} + d_2\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}} = c_2\sqrt{\frac{\phi(t)}{t}}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность А.А.Бутову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бутов А. А.* Теорема для оценок вероятностей пересечения границы простым монотонным дифференцируемым процессом // Учёные записки УлГУ: Фундаментальные проблемы математики и механики. – в.1(10). – 2001.

[2] *Krylov N. V.*, (1996) Introduction to the Theory of Diffusion Processes, AMS, 269 pp.

[3] *Скороход А.В., Слободенюк Н.П.*, (1970) Предельные теоремы для случайных блужданий, "Наукова думка", Киев, 302 с.

УДК 517.929

ПРЕДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИЗУЧЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.[9]

Н.О.Седова

Дифференциальные уравнения с запаздыванием описывают процессы, в которых скорость изменения состояния в каждый момент времени зависит не только от текущего состояния, но и от "предыстории" процесса, то есть некоторых предыдущих состояний.

В настоящей работе рассматриваются неавтономные уравнения с запаздыванием, в которых неизвестная функция x зависит от одной переменной t, традиционно называемой временем. Если можно указать число $r > 0$, такое, что для любого t производная $\dot{x}(t)$ не зависит от значений $x(s)$ при $s < t - r$, то запаздывание называется конечным, иначе – бесконечным или неограниченным.

Для уравнений с неограниченным запаздыванием значительную роль в построении теории играет выбор подходящего фазового пространства Аксиоматический подход к этой проблеме, разработанный в статье [11], и в дальнейшем используемый во многих работах (см., например, ([12], [15], [16], [18]), позволяет определить условия, при которых возможно построение предельных уравнений со свойствами, аналогичными полученным для обыкновенных [13] и функционально-дифференциальных с конечным запаздыванием [2], [6] уравнений. Класс уравнений, для которых можно построить предельные, достаточно широк и включает в себя, в частности, уравнения с почти периодической по t правой частью.

Соотношение между устойчивостью по Ляпунову решений дифференциального уравнения и решений предельных уравнений обсуждалась многими авторами, см., например, [2], [12], [15], [17], [18] и ссылки в них. Некоторые"устойчивоподобные" свойства

[9]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 02-01-00877).

“наследуются” всем семейством предельных уравнений, что позволяет сделать вывод о свойствах целого класса уравнений, изучив лишь одно [15]. С практической точки зрения представляют интерес результаты, позволяющие на основе свойств предельных уравнений делать вывод о поведении решений исходного уравнения. Такие утверждения особенно удобно применять в тех случаях, когда предельные уравнения имеют более простую структуру, чем исходное, например, являются автономными, а также для уравнений с исчезающими в различных смыслах возмущениями.

В работе предлагаются результаты такого рода, развивающие о обобщающие некоторые известные утверждения [1], [2], [12], [18] для уравнений с неограниченным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t).$$

В первом разделе приводятся основные определения и вспомогательные результаты, используемые на протяжении всей статьи. Второй раздел посвящен определениям устойчивости и построению предельных уравнений. В третьем разделе сформулированы основные результаты при сделанных предположениях. В четвертом разделе обсуждаются следствия из доказанных теорем для уравнений с возмущениями. Применение полученных результатов иллюстрируется примерами в разделе 5.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения.

Пусть R^n – действительное n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, B — действительное векторное пространство либо
(i) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо
(ii) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.
и в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что пространство $(B, |\cdot|_B)$ является банаховым.

Для функции $x : (-\infty, A) \to R^n$, $0 < A \leqslant +\infty$ определим функцию $x_t : (-\infty, 0] \to R^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leqslant 0$ для каждого $t \in [0, A)$.

Определение 1 (10). *Пространство B назовём допустимым, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция M :*

$[0, \infty) \to [0, \infty)$ *такие, что выполняются следующие условия. Пусть* $0 \leqslant a < A \leqslant \infty$. *Если* $x : (-\infty, A) \to R^n$ *непрерывна на* $[a, A)$ *и* $x_a \in B$, *то для всех* $t \in [a, A)$

(B1) $x_t \in B$ *и* x_t *непрерывно по* t *относительно* $|\cdot|_B$;

(B2) $|x_t|_B \leqslant K \max\limits_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t-a)|x_a|_B$;

(B3) $|\varphi(0)| \leqslant J|\varphi|_B$ *для всех* $\varphi \in B$;

(B4) $M(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Простейшим примером допустимого пространства является определенное для любого $r > 0$ пространство $C([-r, 0])$ непрерывных на $[-r, 0]$ функций с нормой $|\varphi|_{C([-r,0])} = \sup_{-r \leqslant s \leqslant 0} |\varphi(s)|$. Рассмотрим еще два важных класса допустимых пространств (см., например, [10]).

1. Пусть

$$g : (-\infty, 0] \to [1, \infty) \text{ — непрерывная невозрастающая функция,} \quad g(0) = 1, \tag{g1}$$

$$[g(s+u)/g(s)] \to 1 \text{ равномерно на } (-\infty, 0] \text{ при } u \to 0-, \quad \lim_{T\to\infty} \sup_{s \leqslant 0} \frac{g(s)}{g(s-T)} = 0. \tag{g2}$$

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, таких, что $\sup\limits_{s \leqslant 0} |\varphi(s)|/g(s) < \infty$. Тогда C_g с нормой $|\varphi|_g = |\varphi|_{C_g} = \sup\limits_{s \leqslant 0} |\varphi(s)|/g(s)$ есть банахово пространство. Рассмотрим подпространство $UC_g = \{\varphi \in C_g : \varphi/g \text{ равномерно непрерывна на } (-\infty, 0]\}$. Тогда UC_g допустимо. Частным случаем пространства C_g является часто используемое в исследованиях пространство C_γ с $g(s) = e^{-\gamma s}$ для $\gamma > 0$. Очевидно, пространство C_γ допустимо. Заметим, что при $\gamma = 0$ получаем пространство C_0 ограниченных непрерывных функций с супремум-нормой, которое допустимым не является.

2. Пусть $k : (-\infty, 0] \to (0, \infty)$ — измеримая функция, такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} k(s)ds < \infty, \quad \sup_{s \leqslant 0} k(s-T)/k(s) \leqslant L(T) \tag{k}$$

для некоторой непрерывной функции $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$, у которой $\lim_{T\to\infty} L(T) = 0$. Пусть M_0 — пространство измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и φ эквивалентна ψ в M_0, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. Определим

$$M_k = \left\{ \varphi \in M_0 : \int\limits_{-\infty}^{0} k(s)|\varphi(s)|ds < \infty \right\},$$

и для $r > 0$ определим пространство $M_k^r = \{\varphi \in M_k : \varphi$ непрерывна на $[-r, 0]\}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{M_k^r} = \|\varphi\|_k^r = \max \left\{ \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} |\varphi(s)|, \int\limits_{-\infty}^{0} k(s)|\varphi(s)|ds \right\}.$$

Тогда пространство M_k^r является допустимым [10].

Пусть B — допустимое сепарабельное пространство. Для произвольного $a > 0$ определим множества $B_a = \{\varphi \in B : |\varphi|_B < a\}$, $\bar{B}_a = \{\varphi \in B : |\varphi|_B \leqslant a\}$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t) \tag{1}$$

где X есть непрерывное отображение, определенное на множестве $R^+ \times B_H \to R^n$ для некоторого $0 < H \leqslant \infty$, ограниченное на каждом множестве $R^+ \times \bar{B}_h$, $|X(t, \varphi)| \leqslant m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times \bar{B}_h$, $0 < h < H$. Тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (1), определённое для $t \in [\alpha, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$, то есть непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[\alpha, \beta)$, и такое, что $x_\alpha = \varphi$. Кроме того, для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и $x(t)$ – непродолжаемого решения (1) на $[\alpha, \beta)$, такого, что $x_\alpha \in B_\varepsilon$, либо $\beta = +\infty$, либо $|x_{t_1}|_B = \varepsilon$ для некоторого $t_1 \in (\alpha, \beta)$ [10], [16].

2. Определения устойчивости и предельные уравнения.

Предположим, что уравнение (1) имеет нулевое решение, которое мы и будем исследовать на устойчивость.

Определение 2. *Нулевое решение уравнения (1) называется устойчивым в R^n [в B], если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R^+$ существует $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ $[|x_t(\alpha, \varphi)|_B < \varepsilon]$ для* *всех $t \geqslant \alpha$ при $|\varphi|_B < \delta$. Точка $x = 0$ является точкой притяжения решений уравнения (1) в R^n [в B], если для произвольного $\alpha > 0$ найдется $\Delta(\alpha) > 0$ такое, что из $|\varphi|_B < \Delta$ следует $|x(t;\alpha,\varphi)| \to 0$ $[|x_t(\alpha,\varphi)|_B \to 0]$ при $n \to \infty$. Нулевое решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и $x = 0$ есть точка притяжения решений (1) (в R^n или в B).*

Определение 3. *Нулевое решение уравнения (1) эквиасимптотически устойчиво в R^n [в B], если оно устойчиво и для произвольного $\alpha \in R^+$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $\Delta(\alpha)$ и $T(\varepsilon,\alpha)$ такие, что при всех $|\varphi|_B < \Delta$, $t \geqslant \alpha + T$ выполняется $|x(t;\alpha,\varphi)| < \varepsilon$ $[|x_t(\alpha,\varphi)|_B < \varepsilon]$. Если числа δ (см. определение 2), Δ и T не зависят от α, то имеет место равномерная асимптотическая устойчивость.*

Заметим, что если запаздывание ограничено, то определения устойчивости по отношению к нормам в R^n и в фазовом пространстве, очевидно, эквивалентны. В случае неограниченного запаздывания это в общем случае не так. Например, если в качестве фазового пространства мы выберем пространство C_0, то ненулевое решение никогда не стремится к нулю по отношению к норме этого пространства, то есть $|x_t|_{C_0} = \sup_{s\leqslant 0}|x(t+s)| \not\to 0$ при $t \to \infty$. В то же время если $|x(t) \to 0$, то $\sup_{s\leqslant 0}|x(t+s)|e^{\gamma s} \to 0$ для любого $\gamma > 0$. Справедлив следующий результат [16]:

Лемма 1. *Для допустимого пространства B определения (равномерной) (асимптотической) устойчивости эквивалентны.*

Таким образом, в дальнейшем мы можем говорить просто об устойчивости, не уточняя, по отношению к какой норме она понимается.

Допустим теперь, что имеет место следующее предположение:

Предположение 1. *Функционал $X(t,\varphi)$ равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset B_H$ — компакт, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$ такое, что для всех $(t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K$ из неравенств $|t_2 - t_1| < \delta$, $|\varphi_2 - \varphi_1|_B < \delta$ следует $|X(t_2,\varphi_2) - X(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon$.*

Пусть $\mathcal{F}_X = C(R^+ \times B_H, R^n)$ – пространство непрерывных функций, определенных на $R^+ \times B_H$ со значениями в R^n. Для $X \in \mathcal{F}_X$ определим семейство сдвигов $T(X) = \{X_\tau(t,\varphi) = X(\tau + t,\varphi), \tau \in R^+\}$ и обозначим $H(X)$ замыкание множества $T(X)$ в пространстве $\mathcal{F}_X$. В силу предположения 1 множество $H(X)$ компактно в пространстве $\mathcal{F}_X$. Обозначим $\Omega(X) = \{X^* \in \mathcal{F}_X \mid \exists\{t_n\}\ t_n \to \infty : X_{t_n} \to X^* \text{ в } \mathcal{F}_X\}$. Очевидно, $H(X) = T(X) \cup \Omega(X)$.

Уравнению (1) сопоставим семейство *предельных уравнений* [17], [18]:

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x_t), \tag{2}$$

где $X^*(t,\varphi) \in \Omega(X)$ есть предельный к X функционал, определяемый некоторой последовательностью $t_k \to +\infty$, то есть $X^*(t,\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} X(t+t_k,\varphi)$ для $(t,\varphi) \in R^+ \times B_H$ (при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0,T] \times K$, где $T > 0$, K – компакт из B_H).

Определение 4. *Нулевое решение уравнения (1) называется асимптотически устойчивым в $\Omega(X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R^+$ существуют $\delta(\alpha,\varepsilon) > 0$ и $\Delta(\alpha) > 0$ такие, что $|x_t(\alpha,\varphi)|_B < \varepsilon$ для всех $t \geqslant \alpha$ при $|\varphi|_B < \delta$, а из $|\varphi|_B < \Delta$ следует $|x_t(\alpha,\varphi)|_B \to 0$ при $n \to \infty$ для любого решения любого предельного уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t,x_t)$.*

3. Теоремы об асимптотической устойчивости.

Используя введенные определения и предположения, а также леммы 2.1 и 2.2 из [18], можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Если нулевое решение единственно для уравнения (1) и асимптотически устойчиво в $\Omega(X)$, то оно равномерно асимптотически устойчиво.*

В этой теореме для установления равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения исходного уравнения требуется, чтобы $x = 0$ был точкой притяжения равномерно относительно *всех* предельных уравнений. В общем случае это требование нельзя ослабить и потребовать, чтобы 0 был притягивающим по отношению лишь к *некоторому* предельному уравнению. Недостаточно предполагать и просто асимптотическую устойчивость нулевого решения каждого предельного уравнения (то есть когда числа δ и Δ в определении асимптотической устойчивости зависят еще и от правой части). Даже для обыкновенного дифференциального уравнения из *равномерной* асимптотической устойчивости нулевого решения каждого предельного уравнения не следует равномерная асимптотическая устойчивость (и даже просто равномерная устойчивость) нулевого решения исходного уравнения. Соответствующие контрпримеры можно найти в [7]. Тем не менее можно доказать следующий результат:

Теорема 2. *Пусть нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво и существует предельное уравнение, для которого $x = 0$ является точкой притяжения. Тогда нулевое решение уравнения (1) эквиасимптотически устойчиво.*

Заметим, что эта теорема позволяет определить эквиасимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям компактности $H(X)$ лишь на некоторой последовательности интервалов $[t_k, t_k + T_k]$, $t_k \to \infty$, $T_k \geqslant T_0 > 0$. Вне этих интервалов достаточно, чтобы правая часть уравнения удовлетворяла лишь условиям существования решений. В этом случае предельный функционал $X^*(t,\varphi)$ будет задаваться последовательностью $\{t_{k_j}\}$ и определен по крайней мере для $t \in [0, T]$, $T \geqslant T_0$.

4. Уравнения с возмущениями.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t) + g(t, x_t), \tag{3}$$

в котором $X(t,\varphi)$ – функционал из уравнения (1), а $g(t,\varphi) :\ C(R^+ \times B_H, R^n)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} \sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\left|\int_t^{t+u} g(s,\varphi)\,ds\right| \to 0 \text{ при } t\to\infty \text{ для всех } \varphi\in B_H; \\ \exists r>0,\ b(s): R^+\to R^+ \text{ – неубывающая, } b(0)=0 \\ \text{и } h(t):\ \lim_{t\to\infty}\int_t^{t+1}|h(u)|du=0, \\ \text{такие, что } |g(t,\varphi)-g(t,\psi)|\leqslant b(|\varphi-\psi|_B)+h(t) \\ \text{для всех } t\geqslant 0,\ \varphi,\psi\in\bar{B}_{H+r} \end{gathered} \tag{4}$$

Таким условиям удовлетворяет, например, функционал $g(t,\varphi) = \varphi(0)\sin t^2$ (см. [14]).

Используя лемму 2.1 из [18] и незначительно изменяя доказательство теоремы 2, получаем

Теорема 3 обобщает результаты работы [18], где равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (3) доказана при условии, что $x = 0$ есть точка равномерного притяжения в $\Omega(X)$, либо что нулевое решение слабо равномерно асимптотически устойчиво в $\Omega(X)$.

Для более узкого класса функционалов, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\forall X^* \in \Omega(X)\ H(X^*) = \Omega(X)$$

в работе [18] показана равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (3) в условиях теоремы 4, однако для правых частей, удовлетворяющих менее строгому условию

$$X \in \Omega(X), \tag{5}$$

доказан лишь следующий результат:

Теорема 6. *Пусть $X(t, \varphi)$ удовлетворяет условию (5), $x = 0$ является точкой притяжения для уравнения (1). Тогда для уравнения (3) при условии (4) из равномерной устойчивости нулевого решения следует его эквиасимптотическая устойчивость.*

Очевидно, теорема 6 является частным случаем теоремы 4.

В работе [12] доказано, что из равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения регулярного уравнения (1) следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (3), в котором $g \in C(R^+ \times B_H, R^n)$,

$$g(t, \varphi) \to 0 \text{ при } t \to \infty \text{ равномерно по } \varphi \in K,\ K \subset B_H \text{ - компакт.} \tag{6}$$

В работе [1] для случая ограниченного запаздывания показано, что из равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения регулярного уравнения (1) следует его устойчивость при постоянно действующих возмущениях согласно следующему определению:

Определение 5. *Нулевое решение уравнения (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\forall \alpha \in R^+$, $\forall \varphi \in B_{\delta_1}$ и для любого $g(t, \varphi)$,* *удовлетворяющего условиям*

$$|g(t,\varphi)| \leqslant \rho(t), \ \int\limits_0^\infty \rho(s)\,ds < \infty, \ |g(t,\varphi)| \leqslant \delta_2 \ \forall (t,\varphi) \in R^+ \times B_\varepsilon, \qquad (7)$$

решение $\tilde{x}(t;\alpha,\varphi)$ *уравнения (3) удовлетворяет неравенству* $|\tilde{x}_t(\alpha,\varphi)|_B < \varepsilon$.

Очевидно, что условия (6) и (7) являются частными случаями условий (4) и теорема 5 обобщает указанные результаты.

5. Примеры.

Пример 1 ([5], [8]). Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t-r) \qquad (8)$$

в фазовом пространстве $C([-r,0])$. Функции $a(t)$ и $b(t)$ предполагаем равномерно непрерывными и ограниченными, $a^*(t)$ и $b^*(t)$ обозначим соответствующие предельные (для одной и той же последовательности) функции: $a^*(t) = \lim_{t_k\to\infty} a(t+t_k)$, $b^*(t) = \lim_{t_k\to\infty} b(t+t_k)$. Предположим, что

$$\delta := \liminf\nolimits_{t\to\infty} a(t) > 0,$$
$$c(t) := (2a(t)-\delta)\delta - b^2(t) \geqslant 0 \ \forall t \geqslant 0, \qquad (9)$$

$\int_S c(t)\,dt = \infty$ для любого множества S, удовлетворяющего условию $\liminf_{t\to\infty} \mu([t-r,t]\cap S) > 0$, $\mu(\cdot)$ – мера Лебега.

Тогда, очевидно, тем же условиям удовлетворяет пара любых предельных функций $a^*(t)$, $b^*(t)$, и нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво в $\Omega(X)$ (но не обязательно равномерно, см. [8]). Отсюда по теореме 1 следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (8). Заметим, что в [5] в качестве достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости приводятся следующие:

$$a(t) \geqslant \delta > 0, \ c(t) \geqslant \gamma > 0 \ \forall t \geqslant 0.$$

Пример 2 [3]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t-r) + \int\limits_{-\infty}^0 p(t,s)x(t+s)ds, \qquad (10)$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ равномерно непрерывны и ограничены, $p(t,s)$ равномерно непрерывна по t,

$$0 < p(t,s) \leqslant p_1(s), \quad \int\limits_{-\infty}^{0} p_1(s)ds = 1,$$

$$\sup_{s\leqslant 0} p_1(s-T)/p_1(s) \leqslant L(T), \quad \lim_{T\to\infty} L(T) = 0,$$

$$\text{для всех } \rho \geqslant 0,\ t \geqslant \rho \ \sup_{s\leqslant 0} p(t,s-\rho)/p(t-\rho,s) + \int\limits_{-\rho}^{0} p(t,s)ds \leqslant 1, \quad (11)$$

$$a(t) + b(t) \geqslant 1, \quad (12)$$

и существуют последовательность $\tau_k \to +\infty$, числа $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$a(t) + b(t) - 1 > \delta \text{ для } t \in [\tau_k, \tau_k + \varepsilon]. \quad (13)$$

В качестве пространства B возьмём $M^h_{p_1}$. В работе [3] показано, что при данных предположениях нулевое решение уравнения (10) асимптотически устойчиво.

Пусть теперь вместо условия (11) выполняется следующее:

$$p(t,s) \leqslant p_2(t)p_1(s),\ 0 < p_2(t) \leqslant 1,\ lim_{t\to\infty} p_2(t) = 0.$$

Тогда функционал $g(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{0} p(t,s)\varphi(s)\,ds$ удовлетворяет условиям (4). Отсюда, используя теорему 3 и предыдущий пример, получаем, что достаточными условиями равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (10) являются условия (9). Заметим, что ни одно из условий (9), (12)+(13) не является следствием другого, например, условия (12), (13) могут выполняться для отрицательной $a(t)$, а функции $a(t) = \frac{\sin t}{1} + 1$, $b(t) = -\frac{\sin t}{2}$ удовлетворяют условиям (9), но не удовлетворяют условияю (13).

Пример 3 ([19]). Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau(t)) + h(t,x_t),\ f(t,0) = h(t,0) \equiv 0 \quad (14)$$

в фазовом пространстве C_0.

В работе [19] доказана эквиасимптотическая устойчивость (в R) нулевого решения уравнения (14) при следующих предположениях:

$$0 \leqslant \tau(t) \leqslant r \ \forall t \geqslant 0 \ (0 < r < \infty); \ xf(t,x) \leqslant -a(t)x^2 \ \forall (t,x) \in R^+ \times R;$$

$$|h(t,x)| \leqslant \theta a(t) \sup\{|\sigma(s)\varphi(s)| : s \leqslant 0\} \ \forall (t,\varphi) \in R^+ \times C_0,$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \sigma(s) \leqslant 1$ для $s \leqslant 0$, $\sigma(s) \to 0$ при $s \to -\infty$;

$$\int\limits_{(t-r(t))^+}^{t} a(s)\,ds \leqslant c \leqslant \frac{1-\theta}{1+\theta} \ (m^+ = \max\{0,m\}) \ \forall t \geqslant 0, \ \int\limits_0^\infty a(s)\,ds = \infty. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь это уравнение в (допустимом) фазовом пространстве UC_g, $g(s) = 1/\sigma(s)$ (ясно, что $C_0 \subset UC_g$) и предположим, что правая часть уравнения удовлетворяет условиям предположения 1. Тогда используя теорему 4 [3] и пару Ляпунова-Разумихина $(x^2, |\varphi|_g)$ (см. также [10]), можно показать, что при если вместо (15) выполняется неравенство $\limsup_{t\to\infty} a(t) > 0$ и функция $a(t)$ равномерно непрерывна и ограничена, то нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво в $\Omega(X)$, а следовательно, по теореме 1, равномерно асимптотически устойчиво.

Пример 4 ([6]). Рассмотрим в фазовом пространстве $C([-1,0])$ уравнение

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f(t)\int\limits_{-1}^{0} x(t+s)\,ds, \tag{16}$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin \pi t & t \in [0,1]; \\ 0 & t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}]; \\ \sin(k+1)\pi t & t \in [2^{2k+1}, 2^{2k+2}], \ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Функция $f(t)$ не является равномерно непрерывной, однако на последовательности интервалов $[t_k, t_k + T_k]$, где $t_k = 2^{2k}$, $T_k = 2^{2k}$, $f(t)$ удовлетворяет предположению 1 и $f(t_k + t) \to f^*(t) \equiv 0$ равномерно на каждом отрезке $[0,T]$. Предельное уравнение, соответствующее последовательности $\{t_k\}$, имеет вид $\dot{x}(t) = -x(t)$, и его нулевое решение, очевидно, асимптотически устойчиво. Равномерная устойчивость нулевого решения уравнения (16) устанавливается на основе теоремы Разумихина об устойчивости [4] при помощи простейшей функции Ляпунова $V(x) = x^2$. Отсюда по теореме 2 получаем эквиасимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (16). Заметим, что условие (5) для правой части уравнения не выполняется.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что функционал $g(t,\varphi) = f(t)\int_{-1}^{0}\varphi(s)\,ds$ удовлетворяет условиям (4) с $b(s) = s$ и $h(t) \equiv 0$, поэтому нулевое решение уравнения (16) равномерно асимптотически устойчиво в силу теоремы 5.

Можно рассмотреть и более общее уравнение

$$\dot{x}(t) = X(t,x_t) + f(t)\int\limits_{-\infty}^{0} x(t+s)g(s)\,ds,$$

где функция $1/g(s)$ удовлетворяет условиям (g1), (g2), в пространстве UC_g. Тогда в силу теоремы 3 нулевое решение этого уравнения равномерно асимптотически устойчиво, если $X(t,0) \equiv 0$ и нулевое решение уравнения $\dot{x}(t) = X(t,x_t)$ асимптотически устойчиво в $\Omega(X)$.

Литература.

1. *Андреев А.С.* Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Часть I. – Ульяновск: фМГУ, 1994.

2. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Диффер. уравнения. 1998. Т.34. N 4. С.435-440.

3. *Седова Н.О.* К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием. // Диффер. уравнения. 2002. Т.38. N 10. С.1338–1347.

4. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием. // ПММ. 1956. Т.20. N 4. С.500–512.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.:Мир, 1984.

6. *Andreev A., Sedova N.* On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations. // Functional Differential Equations. 1998. V.5. N 1-2. P.21–37.

7. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations. // J. Differential Equations. 1978. V.27. P.172–189.

8. *Burton T.A., Hatvani L.* On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations. // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.

9. *Corduneanu C. and Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods &Applications. 1980. V.4. P.831–877.

10. *Haddock J. and Terjéki J.* On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay. // J. Differential equations. 1990. V.86. P.1–32.

11. *Hale J. and Kato J.* Phase space for retarted equations with infinite delay. // Funkcialai Ekvacioj. 1978. V.21. P.11–41.

12. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay. // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P.597–605.

13. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V.127. P.214–262.

14. *Strauss A. and Yorke J.A.* Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems. // J. Differential Equations. 1969. V.6. P.452–483.

15. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay. // Lecture Notes Math. 1982. N 1017. P.300–312.

16. *Kato J.* Stability problem in functional differential equations with infinite delay. // Funkcialai Ekvacioj. 1978. V.21. P.63–80.

17. *Kato J. and Yoshizawa T.* Remarks on global properties in limiting equations. // Funkcialai Ekvacioj. 1981. V.24. P.363–371.

18. *Murakami S.* Perturbation Theorem for functional differential equations with infinite delay via limiting equations, // J. Differential equations. 1985. V.59. P.314–335.

19. *Terjéki J.* On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations. // Annalea Polonici Mathematici. 1979. V.36. P.299–314.

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА[10]

И.А. Чудинова (Перцева)

Рассматривается задача о стабилизации движения твердого тела относительно неинерциальной системы координат.

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ - инерциальная система координат, $Oxyz$ система координат, неизменно связанная с телом, точка O совпадает с центром масс тела, $O\alpha\beta\gamma$ - система координат, совершающая заданное движение относительно $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть заданы два ортогональных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, неизменных в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два ортогональных орта $\bar{r}_{01}$ и $\bar{r}_{02}$, неизменных в системе $Oxyz$. Положим

$$\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}, \qquad \bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}.$$

Уравнения движения твердого тела выпишем в системе координат $Oxyz$.

$$\begin{gathered} m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{F} \\ I\frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} = \bar{M} \\ \frac{d\bar{s}_{0i}}{dt} = -\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i}, \qquad i = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь m - масса тела, $\bar{v}$ - вектор абсолютной скорости центра масс тела в проекциях на оси системы координат $Oxyz$, $\bar{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости тела в проекциях на те же оси, I - тензор инерции тела, $\bar{F}_y$ - суммарный вектор внешних сил, действующих на тело, $\bar{M}_y$ момент внешних сил. Пусть

$$\bar{v} = \bar{v}_p(t), \qquad \bar{\omega} = \bar{\omega}_p(t), \qquad \bar{s}_{0i} \parallel \bar{r}_{0i} \tag{2}$$

програмное движение, которое обеспечивается управляющими силами $\bar{F}_p$ и моментом и $\bar{M}_p$.

[10]Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России"(про № УР.04.01.004).

Рассмотрим задачу об определени стабилизирующей силы $\bar{F}_{st} = \bar{F} - \bar{F}_y$ и момента $\bar{M}_{st} = \bar{M} - \bar{M}_y$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость заданного програмного движения. Введем возмущения

$$\triangle\bar{v} = \bar{v} - \bar{v}_p(t), \qquad \triangle\bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_p(t) \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) получим уравнения возмущенного движения

$$m\frac{d\triangle\bar{v}}{dt} + \triangle\bar{\omega} \times \triangle\bar{v} + \triangle\bar{\omega} \times \bar{v}_p(t) + \bar{\omega}_p(t) \times \triangle\bar{v} = \bar{F}_{st}$$

$$I\frac{d\triangle\bar{\omega}}{dt} + \triangle\bar{\omega} \times I\triangle\bar{\omega} + \triangle\bar{\omega} \times I\bar{\omega}_p(t) + \bar{\omega}_p(t) \times I\triangle\bar{\omega} = \bar{M}_{st} \tag{4}$$

$$\dot{\bar{s}}_{0i} = -(\triangle\bar{\omega} + \bar{\omega}_p(t)) \times \bar{s}_{0i}.$$

Покажем, что поставленная задача решается, если $\bar{F}_{st}$ и $\bar{M}_{st}$ заданы в виде

$$\bar{F}_{st} = -D\triangle\bar{v},$$

$$\bar{M}_{st} = -B\triangle\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}), \qquad \alpha_i = const > 0, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

где B и D - матрицы 3×3

Для функции Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}[\triangle\bar{\omega}I\triangle\bar{\omega} + m\triangle\bar{v}\triangle\bar{v} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r_0}_i - \bar{s_0}_i)^2] \tag{6}$$

найдем производную.

$$\dot{V} = -\triangle\bar{\omega}B\triangle\bar{\omega} - \triangle\bar{v}D\triangle\bar{v} - \triangle\bar{v}(\triangle\bar{\omega} \times \bar{v}_p) \qquad (7).$$

Допустим, что управляющие матрицы B и D выбраны таким образом, что

$$\dot{V} \leq -C_0[(\triangle\bar{\omega})^2 + (\triangle\bar{V})^2] \leq 0, \qquad C_0 = const > 0$$

Уравнения, предельные к (4)имеют вид [1-2]

$$m\frac{d\triangle\bar{v}}{dt} + \triangle\bar{\omega} \times \triangle\bar{v} + \triangle\bar{\omega} \times \bar{v}_p^*(t) + \bar{\omega}_p^*(t) \times \triangle\bar{v} = \bar{F}_{st}$$

$$I\frac{d\triangle\bar{\omega}}{dt} + \triangle\bar{\omega} \times I\triangle\bar{\omega} + \triangle\bar{\omega} \times I\bar{\omega}_p^*(t) + \bar{\omega}_p^*(t) \times I\triangle\bar{\omega} = \bar{M}_{st}$$

$$\dot{\bar{s}}_{0i} = -(\Delta\bar{\omega} + \bar{\omega}_p^*(t)) \times \bar{s}_{0i}.$$

Полагая в этих уравнениях $\Delta\bar{\omega} = 0$, $\Delta\bar{v} = 0$ находим, что множество $\{\Delta\bar{\omega} = 0,\ \Delta\bar{v} = 0\}$ содержит лишь те решения системы, для которых следует коллинеарность векторов $\bar{r}_{0i}$ и $\bar{s}_{0i}$. Согласно теореме из работы [1], имеем следующий результат.

Теорема. Пусть задано програмное движение тела - система $O\alpha\beta\gamma$ движется относительно $O_1\xi\eta\zeta$ по закону $\bar{v} = \bar{v}_p(t)$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_p(t)$, $\bar{s}_{0i} \parallel \bar{r}_{0i}$. Тогда управление (5) обеспечивает решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С. Об устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы //ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2.

2. Андреев А.С., Чудинова И.А. К задаче об ориентации спутника отосительно произвольной системы координат.//Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып. 1(10). 2001.

3. Бугров Д.И. Построение стабилизирующего управления летательным аппаратом с использованием функции Ляпунова // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5.

УДК 519.622

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК ЛОКАЛЬНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ ОШИБОК ДЛЯ МЕТОДОВ НОРДСИКА [11]

С.К. Шиндин

Введение

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = g\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbf{R}^n$, пусть также функция g $s+2$ раза непрерывно дифференцируема. Для численного решения системы (1) введем на отрезке $[t_0, t_0+T]$ произвольную неравномерную сетку

$$w_\tau = \{t_{k+1} = t_k + \tau_k,\ k = 0, 1, ..., K-1,\ t_K = t_0 + T\}$$

с диаметром $\tau = \max\limits_{0 \le k \le K-1} \{\tau_k\}$, и применим r-стадийный метод Нордсика

$$X_{k+1} = (PD(k) \otimes I_n)X_k + (l \otimes I_n)(\tau_k g(t_{k+1}, x_{k+1}) - (e_1^T PD(k) \otimes I_n)X_k), \tag{2}$$

где $I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – единичная матрица, $P \in \mathbf{R}^{(r+1)\times(r+1)}$ – верхнетреугольная матрица Паскаля, $D(k) \in \mathbf{R}^{(r+1)\times(r+1)}$ – диагональная матрица с элементами $d_{ii}(k) = \frac{\tau_{k-1}^{i-1}}{\tau_k^{i-1}}$, $k = 1, \ldots, K-1$, $i = 1, \ldots, r+1$ и $D(0) = I$, $l = (l_0, l_1, \ldots, l_r)^T \in \mathbf{R}^{r+1}$ – вектор коэффициентов метода Нордсика и $e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbf{R}^{r+1}$, и

$$X(t_{k+1}) = \Big(x(t_{k+1})^T, \tau_k x'(t_{k+1})^T, \frac{\tau_k^2}{2!}x''(t_{k+1})^T, \ldots, \frac{\tau_k^r}{r!}x^{(r)}(t_{k+1})^T\Big)^T,$$

вектор Нордсика. Будем считать, что стартовое значение X_0 задано.

[11]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 01-01-00066).

Известно (см. [3]), что устойчивый метод (2) с $l_r \neq 0$, эквивалентен некоторой многошаговой формуле и имеет порядок $r+2 \geq s \geq r$. Однако, представление Нордсика имеет большое практическое значение, так как в отличии от многошаговых методов такое представление позволяет удобно изменять шаг численного интегрирования. В настоящее время огромное количество программ, реализующих многошаговые методы, используют именно это представление. В их числе и программы для весьма популярного метода Гира, применяющего представление Нордсика для многошаговых формул дифференцирования назад (см. [1]).

Оценка локальной и глобальной ошибок метода Нордсика

Введем функцию

$$\begin{aligned} L(t_{k+1}, X(t), \tau_k) = X(t_{k+1}) - (PD(k) \otimes I_n) X(t_k) - \\ -(l \otimes I_n)(\tau_k g(t_{k+1}, x(t_{k+1})) - (e_1^T PD(k) \otimes I_n) X(t_k)), \end{aligned} \tag{3}$$

называемую невязкой метода Нордсика (2). Вычитая (2) из (3) и пренебрегая величинами порядка $O(\tau^{2s})$, приходим к следующей формуле для вычисления ошибки метода (2)

$$\begin{aligned} \Delta X_{k+1} \cong (I_{n\cdot(r+1)} - (l \otimes I_n)\tau_k \partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} \times \\ \times \Big(((I_{r+1} - l e_1^T) PD(k) \otimes I_n) \Delta X_k + L(t_{k+1}, X(t), \tau_k) \Big), \end{aligned} \tag{4}$$

$k = 0, \ldots, K-1$, где $\Delta X_k = X(t_k) - X_k$ и $\Delta x_k = x(t_k) - x_k$, а $I_{n\cdot(r+1)} \in \mathbf{R}^{(n\cdot(r+1))\times(n\cdot(r+1))}$ и $I_{r+1} \in \mathbf{R}^{(r+1)\times(r+1)}$ — единичные матрицы.

Локальная погрешность — есть погрешность, сделанная на шаге, полагая в формуле (4) величину $\Delta X_k = 0$, и пренебрегая величинами порядка $O(\tau^{2s+2})$ для главного члена локальной погрешности имеем

$$\Psi(t_k)\tau_k^{s+1} = (I_{n\cdot(r+1)} - (l \otimes I_n)\tau_k \partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} L(t_{k+1}, X(t), \tau_k), \tag{5}$$

$k = 0, \ldots, K-1$.

Единственной неизвестной величиной в формуле (5) является невязка метода Нордсика $L(t_{k+1}, X(t), \tau_k)$. Для ее вычисления воспользуемся определением порядка метода Нордсика. Известно, что метод (2) имеет порядок $s+1$ если для всех задач (1) с достаточно гладкой правой частью справедливо одно из следующих двух равенств

$$\Delta \tilde{X}_{k+1} = O(\tau_k^{s+1}), \tag{6а}$$

$$L(t_{k+1}, X(t), \tau_k) = O(\tau_k^{s+1}). \tag{6б}$$

Разлагая правую часть соотношения (3) в ряд Тейлора в окрестности точки t_{k+1}, с учетом порядка метода (2) и гладкости решения (1) для невязки метода (2) имеем следующее простое соотношение

$$L(t_{k+1}, X(t), \tau_k) = (L(s) \otimes I_n)\frac{\tau_k^{s+1}}{(s+1)!}x^{(s+1)}(t_{k+1}) + O(\tau_k^{s+2}), \tag{7}$$

где компоненты вектора $L(s) \in \mathbf{R}^{r+1}$ определяются из соотношений

$$L_{i+1}(s) = l_i \sum_{m=1}^{r}(-1)^{s+1-m} m C_{s+1}^m - \sum_{m=i}^{r}(-1)^{s+1-m} C_{s+1}^m \quad i = 0, \dots, r.$$

Непосредственное использование формулы (7) требует хорошей оценки $s+1$-ой производной точного решения задачи (1). Покажем, как, используя величины X_k и X_{k+1}, получить такую оценку. Заметим, что для всех методов Нордсика справедливо равенство $l_1 = 1$ (см. [3]), откуда $L_2(s) = 0$ и $\tau_k x'_{k+1} = \tau_k x'(t_{k+1}) + O(\tau_k^{s+2})$. Далее будем отдельно рассматривать два случая $s = r$ и $s = r+1$.

Итак, пусть $s = r$, тогда, при условии $\tilde{X}_k = X(t_k) + O(\tau^{s+2})$, очевидно

$$\frac{\tau_k^{s+1}}{(s+1)!}x^{(s+1)}(t_{k+1}) = \frac{1}{r+1}\Big(\tau_k \tilde{x}'_{k+1} - (e_1^T PD(k) \otimes I_n)\tilde{X}_k) + O(\tau_k^{s+2}\Big). \tag{8а}$$

Пусть теперь $s = r+1$. Заметим, что в силу системы (1), $x''(t) = \partial_t g(t, x(t)) + \partial_x g(t, x(t)) g(t, x(t))$, тогда, при условии $\tilde{X}_k = X(t_k) + O(\tau^{s+2})$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\tau_k^{s+1}}{(s+1)!}x^{(s+1)}(t_{k+1}) = \frac{2}{r+2}\Big(&\frac{\tau_k^2}{2!}\partial_t g(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) + \\ &+(\frac{\tau_k}{2}\partial_x g(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) - \frac{r}{2}I_n)(e_1^T \otimes I_n)\tilde{X}_{k+1} - \\ &-((e_2^T - \frac{r}{2}e_1^T)PD(k) \otimes I_n)\tilde{X}_k\Big) + O(\tau_k^{s+2}),\end{aligned} \tag{8б}$$

где $e_2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{r+1}$.

В заключение этого раздела сформулируем теоремы об оценке локальной и глобальной погрешностей метода (2).

Теорема 1. *Пусть правая часть задачи* (1) $s+2$ *раз непрерывно дифференцируема в окрестности решения, а порядок устойчивого* r*-стадийного метода Нордсика* (2) $r \le s \le r+1$. *Тогда, если стартовое значение* X_0, *задано с точностью* $O(\tau^{s+1})$, *а погрешность стартового значения* $\Delta X_0 = X(t_0) - X_0$, *известна с точностью* $O(\tau^{s+2})$, *то для всех сеток* w_τ *с достаточно малым диаметром* τ *формулы* (5), (7) *и* (8) *дают главный член локальной ошибки метода* (2) *в точках сетки, если имеет место уточнение приближенного решения, т.е.*

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \Psi(t_k)\tau_k^{s+1}, \quad k = l-1, \dots, K. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть правая часть задачи* (1) $s+2$ *раз непрерывно дифференцируема в окрестности решения, а порядок устойчивого* r*-стадийного метода Нордсика* (2) $r \le s \le r+1$ *и* $s \ge 3$. *Тогда, если стартовое значение* X_0, *задано с точностью* $O(\tau^{s+1})$, *а погрешность стартового значения* $\Delta X_0 = X(t_0) - X_0$, *известна с точностью* $O(\tau^{s+2})$, *то для всех сеток* w_τ *с достаточно малым диаметром* τ *формула* (4) *дает ошибку метода* (2) *в точках сетки* w_τ *с точностью* $O(\tau^{s+1})$, *если при вычислении величины* $L\big(t_{k+1}, X(t), \tau\big)$ *по формулам* (7) *и* (8) *имеет место уточнение приближенного решения, т.е.*

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \Delta X_{k+1}, \quad k = l-1, \dots, K. \tag{10}$$

Следует отметить, что условие $r \le s \le r+1$ не является ограничительным, так как для любого метода Нордсика порядка $s = r+2$ всегда можно построить эквивалентные $r+1$ и $r+2$ стадийные методы (см. [3]).

Неявные методы

Разностное соотношение (2), распадается на $r+1$ уравнение относительно компонент вектора Нордсика, причем уравнение относительно x_{k+1} является неявным, исследуем возможность использования приближенного решения задачи (2) для оценки главных членов локальной и глобальной погрешностей.

Обозначим через $\bar{X}_k = \bar{X}_k(N)$ приближенное решение задачи (2) полученное за N итераций некоторого порцесса. Принимая во внимание тот факт, что в определении метода (2) неявным является уравнение только относительно первой компоненты вектора Нордсика, для численного решения задачи (2) применим три итерационных метода — метод простых итераций, метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона:

$$x_{k+1}^i = \bar{G}_{k+1-l}^{\tau} x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{11а}$$

$$\frac{\tau_k^i}{i!} x_{k+1}^{(i)} = \sum_{j=i}^{r} \frac{\tau_k^j}{j!} x_k^{(j)} + \tau l_i \Big(g(x_{k+1}) - \sum_{j=1}^{r} \frac{\tau_k^{j-1}}{(j-1)!} x_k^{(j)} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{11б}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_r(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{11в}$$

$$\bar{X}_k = X_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1; \tag{11г}$$

$$x_{k+1}^i = x_{k+1}^{i-1} - \partial \bar{F}_{k+1-l}^{\tau} (x_{k+1}^{i-1})^{-1} \bar{F}_{k+1-l}^{\tau} x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{12а}$$

$$\frac{\tau_k^i}{i!} x_{k+1}^{(i)} = \sum_{j=i}^{r} \frac{\tau_k^j}{j!} x_k^{(j)} + \tau l_i \Big(g(x_{k+1}) - \sum_{j=1}^{r} \frac{\tau_k^{j-1}}{(j-1)!} x_k^{(j)} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{12б}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_r(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{12в}$$

$$\bar{X}_k = X_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1; \tag{12г}$$

$$x_{k+1}^i = x_{k+1}^{i-1} - \partial \bar{F}_{k+1-l}^{\tau} (x_{k+1}^{0})^{-1} \bar{F}_{k+1-l}^{\tau} x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{13а}$$

$$\frac{\tau_k^i}{i!} x_{k+1}^{(i)} = \sum_{j=i}^{r} \frac{\tau_k^j}{j!} x_k^{(j)} + \tau l_i \Big(g(x_{k+1}) - \sum_{j=1}^{r} \frac{\tau_k^{j-1}}{(j-1)!} x_k^{(j)} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{13б}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_r(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{13в}$$

$$\bar{X}_k = X_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{13г}$$

где

$$\bar{G}_{k+1-l}^{\tau} x = \sum_{j=0}^{r} \frac{\tau_k^j}{j!} x_k^{(j)} + \tau l_0 \Big(g(x) - \sum_{j=1}^{r} \frac{\tau_k^{j-1}}{(j-1)!} x_k^{(j)} \Big),$$

$\bar{F}^{\tau}_{k+1-l} = I_n - \bar{G}^{\tau}_{k+1-l}$ и $H_r(t)$ — отрезок ряда Тейлора до порядка r построенный по компонентам вектора Нордсика $\bar{X}_k$. Для ускорения сходимости предложенных выше комбинированных методов используется предиктор порядка $r+1$.

В силу теорем сходимости комбинированных методов для дифференциально алгебраических систем уравнений для ошибок методов (11)-(13) справедливы следующие оценки (см. [2,4,5]):

$$X(t_k) - \bar{X}_k(N) = O(\tau^{\xi}), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{14}$$

где $\xi = \min\{N + \zeta - 1, p, s\}$, $\zeta = \min\{r, p, s\}$ и стартовые значения заданы с точностью $O(\tau^p)$, $p \geq 1$;

$$X(t_k) - \bar{X}_k(N) = O(\tau^{\xi}), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{15}$$

где $\xi = \min\{(\zeta + 1)2^N - 2, p, s\}$;

$$X(t_k) - \bar{X}_k(N) = O(\tau^{\xi}), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{16}$$

где $\xi = \min\{(\zeta + 1)(N + 1) - 2, p, s\}$.Эти оценки являются основополагающими для обоснования локально глобального контроля размера шага интегрирования. Для вычисления главного члена погрешности метода необходимо знать величины $\bar{x}_k$ с точностью $O(\tau^{s+1})$. Заметим, что

$$X(t_k) - \bar{X}_k(N) = X(t_k) - X_k + X_k - \bar{X}_k(N),$$

поэтому достаточно потребовать, чтобы

$$X_k - \bar{X}_k(N) = O(\tau^{s+1}). \tag{17}$$

Так как у нас $p = s+2$ и $r \leq s$, то для числа итераций методов (11)-(13) соответственно справедливы следующие оценки:

$$N \geq s - r + 1, \tag{18}$$

$$N \geq \log_2\Big(\frac{s+3}{r+2}\Big), \tag{19}$$

$$N \geq \frac{s - r + 1}{r + 2}. \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990.

[2] *Куликов Г.Ю.* Численное решение задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений с помощью неявных методов Рунге-Кутты с нетривиальным предиктором// Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1998. Т. 38. No. 1. С. 68–84.

[3] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

[4] *Kulikov G.Yu., Thomsen P.G.* Convergence and implementation of implicit Runge-Kutta methods for DAEs. Technical report 7/1996, IMM, Technical University of Denmark, Lyngby, 1996.

[5] *Kulikov G.Yu.* Numerical methods solving the semi-explicit differential-algebraic equations by implicit multistep fixed stepsize methods// Korean J. Comput. & Appl. Math. 1997. V. 4. N 2. P. 281–318.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[12]

О.Д. Юрьева

На основе известных результатов работ [1, 2, 3] выведены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия нестационарной линейной механической системы. Рассмотрен частный случай, когда на механическую систему действуют только потенциальные и диссипативные силы, причем диссипативные силы являются силами частичной диссипации. Полученный результат развивает результат работы Г.К.Пожарицкого [4] в случае, когда действующие диссипативные силы являются силами неисчезающей частичной диссипации, а также работы [3].

Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается уравнениями
$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + C(t)Px = 0. \tag{1}$$
Здесь x — n-мерный вектор обобщенных координат, $\|B(t)\| \le b = const$, $P = P^T = const$, $C(t) = C^T(t)$, $\|C(t)\| \le c = const$ — есть матрицы размерностей $n \times n$, определяющие действие внешних сил, линейных относительно скоростей и координат.

На основе результатов работы [1] выведем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия данной системы.

1. Рассмотрим случай, когда на механическую систему действуют только потенциальные и диссипативные силы
$$\begin{gathered} Q_d = -B(t)\dot{x}, \quad \dot{x}^T B(t)\dot{x} \le 0, \\ Q_p = -C(t)x, \quad C(t) \ge c_0 E, \quad c_0 = const > 0, \quad \dot{C}(t) \le 0. \end{gathered} \tag{2}$$
Таким образом, зависимость потенциальных сил от времени исчезает при $t \to +\infty$, и пусть
$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = C_0 \tag{3}$$

[12]Работа выполнена при финансовой подержке РФФИ (проект № 02-01-00877) и программы "Университеты России"(проект УР.04.01.004).

Очевидно, что $C_0 \geq c_0 E$.

Допустим, что диссипативные силы являются силами частичной диссипации по первым m координатам $x_1, x_2, ..., x_m (m \leq n)$. Таким образом, имеем

$$\dot{x}^T B(t)\dot{x} \leq -b(t)\|\dot{x}^1\|^2 \leq 0, \qquad \lim_{t\to+\infty,\ T\to+\infty} \inf \int\limits_t^{t+T} b(\tau)d\tau > 0,$$

где $x^1 = (x_1 \ \ x_2 \ \ ... \ \ x_m)^T, b(t) \geq 0$.

Уравнения движения системы могут быть приведены к следующей нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -B(t)y - C(t)x \end{cases}$$

Введем функцию Ляпунова типа потенциальной энергии

$$V = \frac{1}{2}y^T y + \frac{1}{2}x^T C(t)x.$$

Для ее производной в силу уравнений движения находим оценку

$$\dot{V} = -y^T B(t)y + x^T \dot{C}(t)x \leq -b(t)\|y^1\|^2 \leq 0.$$

На основании результатов работы [1] можем утверждать, что нулевое положение равновесия рассматриваемой системы будет равномерно асимптотически устойчивым, если множество $\{y^1 = 0\}$ не содержит решений предельной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -C_0 x. \end{cases}$$

Выделим в этой системе переменные x^1, x^2 и y^1, y^2, представив ее в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= y^1 \\ \dot{x}^2 &= y^2 \\ \dot{y}^1 &= -C_{01}x^1 - C_{02}x^2 \\ \dot{y}^2 &= -C_{02}^T x^1 - C_{03}x^2 \end{cases} \tag{4}$$

Решение этой системы $x = x(t)$ на множестве $\{y^1 = 0\}$ должно удовлетворять следующим соотношениям

$$\dot{x}^1 \equiv 0, \quad x^1(t) = x_0^1 = const, \quad C_{01}x_0^1 + C_{02}x^2(t) \equiv 0,$$

$$\dot{x}^2(t) \equiv y^2(t), \quad \dot{y}^2(t) = -C_{02}^T x_0^1 - C_{03} x^2(t).$$

Общее решение двух последних систем уравнений можно представить как сумму общего решения соответствующей однородной системы $\dot{x}^2(t) \equiv y^2(t), \quad \dot{y}^2(t) = -C_{03}^T x^2(t)$ и частного постоянного решения $x^2(t) = x_0^2$, такого что

$$C_{02}^T x_0^1 + C_{03} x_0^2 = 0 \iff x_0^2 = -C_{03}^{-1} C_{02}^T x_0^1.$$

Это частное решение содержится во множестве $\{C_{01}^T x_0^1 + C_{02} x_0^2 = 0\}$, если только $x_0^1 = x_0^2 = 0$ в силу положительной определенности матрицы C_0. Таким образом, решение системы (4) на множестве $\{y^1 = 0\}$ должно удовлетворять соотношениям

$$x^1(t) \equiv 0, \quad C_{02} x^2(t) \equiv 0,$$
$$\dot{x}^2(t) \equiv y^2(t), \quad \dot{y}^2(t) = -C_{03} x^2(t).$$

Дифференцируя соотношение $C_{02} x^2(t) \equiv 0$ дважды, и, подставляя в последнее соотношение, получаем

$$C_{02} C_{03} x^2(t) \equiv 0.$$

Повторяя этот процесс двукратным дифференцированием $n - m - 1$ раз, получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$C_{02} x^2(t) \equiv 0, \quad C_{02} C_{03} x^2(t) \equiv 0, \quad C_{02}^{n-m-1} C_{03} x^2(t) \equiv 0$$

Эта система будет иметь только нулевое решение, если пара матриц (C_{03}, C_{02}) наблюдаема.

Таким образом, имеем следующий результат.

Нулевое положение равновесия рассматриваемой механической системы в случаях (2),(3) асимптотически устойчиво, если пара матриц (C_{03}, C_{02}) является наблюдаемой.

Полученный результат развивает результат Г.К. Пожарицкого [4] в случае, когда действующие диссипативные силы являются силами неисчезающей частичной диссипации.

2. Рассмотрим задачу об асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1) в общем случае. Для этого представим уравнения (1) в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -B(t)y - C(t)Px \end{cases} \tag{5}$$

Возьмем функцию Ляпунова следующего вида

$$V = \frac{1}{2} y^T C^{-1} y + \frac{1}{2} x^T P x$$

и допустим, что производная этой функции вдоль решений системы (5) является неположительной

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} y^T [B^T C^{-1} + C^{-1} B + C^{-1} \dot{C} C^{-1}] y \leq 0 \qquad (6)$$

Нулевое положение равновесия $x = y = 0$ системы (5) будет равномерно асимптотически устойчивым, если пара матриц $(L^{(0)}(t), A(t))$ строго наблюдаема.

Здесь

$$L^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^{(0)}(t) \end{bmatrix} \qquad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -C(t)P & -B(t) \end{bmatrix}$$

$L_{22}^{(0)}(t) = B^T C^{-1} + C^{-1} B + C^{-1} \dot{C} C^{-1}$.

Уточним эти условия. Находим, что матрица наблюдаемости $S(t)$ пары $(L^{(0)}(t), A(t))$ имеет следующий вид

$$S(t) = \begin{bmatrix} L^{(0)} \\ L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)} \\ (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})A + (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})^{\cdot} \\ (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})A^2 + 2(L^{(0)} + \dot{L}^{(0)})^{\cdot} A + \\ +(L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})\dot{A} + (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})^{\cdot\cdot} \\ \dots \\ (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})A^{2n-1} + \dots + (L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)})^{(2n-1)} \end{bmatrix},$$

где

$$L^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ -CP & -B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{L}_{22}^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{22}^{(0)}CP & \dot{L}_{22}^{(0)} - L_{(22)}^{(0)}B \end{bmatrix}$$

$$L^{(1)} = L^{(0)}A + \dot{L}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{21}^{(1)} & L_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{22}^{(0)}CP & \dot{L}_{22}^{(0)} - L_{22}^{(0)}B \end{bmatrix}$$

$$L^{(2)} = L^{(1)}A + \dot{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{21}^{(2)} & L_{22}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{21}^{(1)} & L_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ -CP & -B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{L}_{21}^{(1)} & \dot{L}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{22}^{(1)}CP + \dot{L}_{21}^{(1)} & L_{21}^{(1)} - L_{22}^{(1)}B + \dot{L}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{21}^{(2)} & L_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$L^{(3)} = L^{(2)}A + \dot{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{21}^{(2)} & L_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ -CP & -B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{L}_{21}^{(2)} & \dot{L}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{22}^{(2)}CP + \dot{L}_{21}^{(2)} & \dot{L}_{22}^{(2)} + L_{21}^{(2)} - L_{22}^{(2)}B \end{bmatrix}$$

и так далее.

Отбросив нулевые строки в матрице $S(t)$, получим матрицу

$$S'(t) = \begin{bmatrix} 0 & L_{22}^{(0)} \\ -L_{22}^{(0)}CP & \dot{L}_{22}^{(0)} - L_{22}^{(0)}B \\ -L_{22}^{(1)}CP + \dot{L}_{21}^{(1)} & \dot{L}_{22}^{(1)} - L_{22}^{(1)}B + L_{21}^{(1)} \\ -L_{22}^{(2)}CP + \dot{L}_{21}^{(2)} & \dot{L}_{22}^{(2)} - L_{22}^{(2)}B + L_{21}^{(2)} \\ \dots & \\ -L_{22}^{(2n-1)}CP + \dot{L}_{21}^{(2n-1)} & \dot{L}_{22}^{(2n-1)} - L_{22}^{(2n-1)}B + L_{21}^{(2n-1)} \end{bmatrix},$$

где

$$L_{22}^{(0)} = B^T C^{-1} + C^{-1}B - C^{-1}\dot{C}^{-1}C^{-1}, \quad L_{21}^{(1)} = -L_{22}^{(0)}CP,$$

$$L_{22}^{(1)} = \dot{L}_{22}^{(0)} - L_{22}^{(0)}B, \quad L_{21}^{(2)} = \dot{L}_{21}^{(1)} - L_{22}^{(1)}CP, \quad L_{22}^{(2)} = \dot{L}_{21}^{(1)} - L_{22}^{(1)}B + \dot{L}_{22}^{(1)},$$

$$L_{21}^{(3)} = \dot{L}_{21}^{(2)} - L_{22}^{(2)}CP, \quad L_{22}^{(3)} = \dot{L}_{22}^{(2)} - L_{22}^{(2)}B + \dot{L}_{21}^{(2)}, \quad \dots,$$

$$L_{21}^{(2n-1)} = \dot{L}_{21}^{(2n-2)} - L_{22}^{(2n-2)}CP, \quad L_{22}^{(2n-1)} = \dot{L}_{22}^{(2n-2)} - L_{22}^{(2n-2)}B + L_{21}^{(2n-2)}.$$

Таким образом, для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения $x = \dot{x} = 0$ системы (5) достаточно, чтобы ранг матрицы $S'(t)$ равнялся $2n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. - 1984. - Т.48. Вып.2.- С.225-232.

[2] Юрьева О.Д. Об устойчивости линейных систем. // Ученые записки Ульяновского государственного университета "Фундаментальные проблемы математики и механики". Ульяновск: Ульян. гос. унив. 1996. Часть 2. Вып. 1. С. 134-139.

[3] Борисова Т.А., Юрьева О.Д. О влиянии на устойчивость положения равновесия гироскопических сил и диссипативных сил с частичной диссипацией. // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Выпуск 1(10). Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. — Ульяновск: УлГУ, 2001. С. 17-20.

[4] Пожарицкий Г.К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. // ПММ. 1961. Т.25. Вып.4. С.657-667.

УДК 531.36

ON INVESTIGATION OF STABILITY BY MEANS OF LYAPUNOV FUNCTIONS AND LIMITING EQUATIONS[13]

A. Andreev

Abstract. The problem on the asymptotic behaviour of solutions of nonautonomous system is considered when the Lyapunov function with semidefinite derivative exists. For this we make use the concepts of limiting equations and functions which are limits of derivates. We prove some theorems on the localization of limited solution sets of the original system, on asymptotic stability and instability of a positive invariant set.

We define some conditions when the perturbations that converge to zero do not influence upon the asymptotic behaviour of solutions and set stability. For example, consider the second order differential equation, which is a basic mathematical model of the representation of damped oscillatory phenomena. The cited results develop and generalize the results of [5,11,16]. The generalization consists of the assumption, that the derivate and invariant set depend on time. There are proved theorems on uniform asymptotic stability.

Consider the system of differential equations

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1}$$

where $X(t,x)$ is a vector-function, $X : R^+ \times G \to R^p$, $R^+ = [0, +\infty[$, G is an open area in the p-dimensional space R^p of real numbers with the norm $\|\cdot\|$. It is supposed, that the conditions of existence of system (1) solutions hold in Caratheodory sense, i.e. $X(t,x)$ is continuous by x for fixed t, is measurable by t for fixed x, and there is an estimation $\| X(t,x) \| \leq h(t)$ for each compact $K \subset G$ where h is locally integrable function.

We assume that $X(t,x)$ satisfies the following condition : there exist such numbers $T = T(\alpha, K, u)$ and $\beta = \beta(\alpha, K, u)$ for each compact $K \subset G$, for

[13]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02-01-00877, № 00-15-96150).

each continuous function $u : R^+ \to K$ and for any small $\alpha > 0$ that the inequality

$$| \int_{a}^{a+s} X(t, u(t))dt | > \alpha \tag{2}$$

for $\alpha > T$ implies $| s | > \beta$.

This condition implies every solution of system (1) $x(t) \in K$ with $t \geq t_0$, is uniformly continuous.

Suppose that $X(t, x)$ satisfies more strong restrictions of system (1) precompactness : there exist such two local L_1-functions $\mu_1(t)$ and $\mu_2(t)$ for any $K \subset$, that for any $x, y \in K$ the following inequalities take place

$$| X(t, x) | \leq \mu_1(t), | X(t, x) - X(t, y) | \leq \mu_2(t) | x - y |, \tag{3}$$

and functions μ_1 and μ_2 satisfy the conditions

$$\int_{E} \mu_1(t)dt \leq \epsilon, \int_{\tau}^{\tau+1} \mu_2(t)dt \leq \rho \tag{4}$$

for any $\epsilon > 0$, any interval $[\tau, \tau + 1] \subset R^+$, each measurable set $E \subset [\tau, \tau + 1]$ with measure $m(E) \leq v(\epsilon, K) > 0$, and for any number $\rho = \rho(K)$. Under these conditions system (1) is precompact and regular in the sense of the following definition introduced by [ ] and developed by [ ].

Definition 1. A system of differential equations

$$\dot{x} = Y(t, x) \tag{5}$$

is said to be a limiting system to system (1) if there is a sequence $t_k \to +\infty$ such that for any sequence of continuous functions $u_k : [a, b] \to G$ ($[a, b] \subset R^+$) converging to the function $u : [a, b] \to G$ the the following correlation holds :

$$\int_{a}^{b} Y(\tau, u(\tau))d\tau = \lim_{k \to \infty} \int_{a}^{b} X(t_k + t, u_k(t))dt \tag{6}$$

System (1) is precompact if for any sequence $t_n \to +\infty$ there exist a subsequence $t_k \to +\infty$ and a limiting system (5) such that

$X_k(t,x) = X(t_k + t, x)$ converges to $Y(t,x)$ in convergence (6).

The system (1) is called regular if for system (1) and every limiting system (5) the initial-value problem has a unique solution for every pair $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$.

Let $V : R^+ \times G \to R$ be a continuous locally Lipschitzian by x. One may determine the upper right-hand derivative along a solution of system (1) for this function [12]:

$$\dot{V}^+(t,x) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{V(t+h, x + hX(t,x)) - V(t,x)}{h}$$

Suppose that V is such function that there is a number $\beta = \beta(K)$ for each compact $K \subset$ that for all $(t,x) \in R^+ \times K$ the following inequality is valid

$$V(t,x) \geq \beta \tag{7}$$

Definition 2. Let $t_n \to +\infty$ be a sequence, $t \in R^+$ and $c \in R$ be some numbers. Introduce the set $V_\infty^{-1}(t,c)$ as a set of all points $x \in$, such that for each of these points there is a subsequence $t_k \to +\infty$ and a sequence $x_k \to x$ so that $\lim\limits_{k \to \infty} V(t_k + t, x_k) = c$.

In comparison with the definition of the set $V_\infty^{-1}(c) = \{x \in G : V(t_n, x_n) \to c$ for $x_n \to x$ and $t_n \to +\infty\}$, introduced by [6], the set $V_\infty^{-1}(t,c)$ gives the possibility to localise the limiting set of solutions (1) more precisely. So, for the function $V = (1 + \sin^2(\sqrt{t})) \parallel x \parallel$ the set $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const\}$ is $\{x : (1+\alpha) \parallel x \parallel = c, \alpha = const, 0 \leq \alpha \leq 1\}$, but the set $\{V_\infty^{-1}(c) : c = const\}$ is $\{x : c \leq 2 \parallel x \parallel \leq 2c\}$.

Suppose that there is a derivative $W : R^+ \times G \to R^+$ such that $\dot{V}^+(t,x) \leq -W(t,x) \leq 0$ for all $(t,x) \in R^+ \times G$.

Definition 3. A function $U : R^+ \times G \to R^+$ is called limiting function for W if there is a sequence $t_n \to +\infty$ such that whenever $u_k : [a,b] \to G$ is a sequence of continuous functions which converges uniformly to $u : [a,b] \to G$, the following equality takes place

$$\int_a^b U(t, u(t))dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b W(t_n + t, u_n(t))dt$$

Sufficient conditions for the precompactness of the set of translates $\{W_s(t,x) = W(s+t, x), s \in R^+\}$ are equivalent to conditions (3) and

(4) for the precompactness of system (1).

Definition 4. The set $\{U(t,x)=0\}$ contains a function $u:]a,b[\to G$ if

$$\int_c^d U(s,u(s))ds = 0$$

for all $c,d \in]a,b[$, i.e. if $U(t,u(t))=0$ for almost every one of $t \in [a,d] \subset [a,b[$.

THEOREMS OF LOCALISATION OF POSITIVE LIMIT SET OF SYSTEM (1) SOLUTIONS.

Theorem 1. Let $X(t,x)$ satisfy condition (2). Assume that the function $V: R^+ \times G \to R$ satisfies condition (7) and the derivative satisfies the inequality $\dot{V}^+_{(1)}(t,x) \le -W(t,x) \le 0$, where the function $W: R^+ \times G$ satisfies the conditions of type (3) and (4).

Then, if the set of limit points of solution $x = x(t,t_0,x_0)$ of (1) is defined for all $t \ge t_0$, $\Omega^+(x(t,t_0,x_0)) \notin \partial\Gamma$, then there exists such number $c = c_0 = const$ that $\Omega^+(x(t,t_0,x_0)) \cap \partial\Gamma$ is the union of continuous functions $x = u(t) : [0,b[\to \Gamma$, $u(t) \in \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{U(t,x)=0\}$

by the sequences $t_n \to +\infty$ for all $t \in [o,b[$

This theorem completes and generalizes results of [6,7,14,17] because dependence of U and V^+ upon t is taked into consideration essentially. For example, the theorem on asymptotic stability of zero solution of Marachkov type is the consequence of theorem 1.

Theorem 2. Assume that

(i) $X(t,0) \equiv 0$;

(ii) there exists the sequence of the intervals $[t_n, t_n+b[$ $(t_n \to +\infty$, $b>0)$ on which function X satisfies condition (2) (i.e., this condition is valid in the points $\{a : a > T, a \in [t_n, t_n+b]\}$;

(iii) there is the function $V : R^+ \times G \to R^+$ such that $V(t,0) = 0$, $V(t,x) \ge h_1(|x|), \dot{V}^+(t,x) \le 0$;

(iv) there are estimations $V(t,x) \le h_2(|x|)$ and $\dot{V}^+(t,x) \le -h_3(|x|)$ for $t \in [t_n, t_n+b[$.

Then the solution $x=0$ of system (1) is asymptotically stable (uniform by $x_0 \in K \subset G$, if system (1) solutions uniformly depend on the original conditions).

Hereafter $h(\cdot)$ is the function of Hahn.

Definition 5. Limiting system $\dot{x} = Y(t,x)$ and limiting function $U(t,x)$ compose the limiting pair (Y,U), if they are limiting for one and the same sequence $t_n \to +\infty$. The set $V_\infty^{-1}(t,c)$ defined by this sequence $t_n \to +\infty$ is called set corresponding to the pair (Y,U).

Let (Y,U) be a limiting pair and $V_\infty^{-1}(t,c)$ be a corresponding set. Denote as $M^+(c)$ the largest subset of $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const\} \cap \{U(t,x) = 0\}$ which is the largest positive invariant subset of the set $V_\infty^{-1}(t,c)$ relatively the system $\dot{x} = Y(t,x)$. Let $M_*^+(c)$ be the union $M^+(c)$ for all limiting pairs (Y,U), $M_*^+(c) = \cup M^+(c)$.

Theorem 3. Suppose that
(i) the function X satisfies conditions (3) and (4);
(ii) the function $V : R^+ \times G \to R$, satisfying condition (7), has the derivative $\dot{V}_{(1)}^+(t,x) \leq -W(t,x) \leq 0$.

Then if solution of system (1) $x = x(t,t_0,x_0)$ is defined for all $t \geq t_0$, then the set of limit points of this solution $\Omega^+(x(t,t_0,x_0)) \subset \{M_*^+(c) : c = const\} \cup \partial\Gamma$.

Corollary 1. Let the conditions of theorem 3 be held . Then every solution of system (1) $x = x(t,t_0,x_0)$, which remains in $K \subset G$, approaches unlimitedly to $\{M_*^+(c) : c = const\}$ as $t \to +\infty$.

Theorem 4. Suppose that
(i) there is function $V : R^+ \times G \to R^+$ such that $\dot{V}_{(1)}^+(t,x) \leq -W(t,x) \leq 0$;
(ii) there exists a limiting pair (Y_0,U_0) such that the set $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const > c_1 \geq 0\} \cap \{U_0(t,x) = 0\}$ contains no solution of the system $\dot{x} = Y_0(t,x)$.

Then every solution of (1) that remains in $K \subset G$ approaches unlimitedly to $\{M_*^+(c) : c = const \leq c_1\}$ as $t \to +\infty$ and, thus, simultaneously

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, x(t,t_0,x_0)) = c = const \leq c_1.$$

Theorems 3 and 4 improve and generalise the corresponding theorems from [9,11,16] about limiting behaviour on the base of Lyapunov function with sign permanent derivative.

ASYMPTOTIC STABILITY AND INSTABILITY OF THE INVARIANT SET.

We will consider the problem of the asymptotic stability and instability of the positive invariant set respectively system (1), whenever the conditions (3) and (4) are valid.

Let $L = L(t) \subset K \subset G$ be a positive invariant set relatively the system (1) : for every point $x_0 \in L(t_0)$ the solution (1) $x(t, t_0, x_0)$ is so that $x(t, t_0, x_0) \in L(t)$ for all $t \geq t_0$.

From the inter-continual dependence of the solutions of systems (1) and (5) we may obtain the following conclusion . Let $t_n \to +\infty$ be a sequence and a point sequence $x_n \in L(t_n)$ converges to x_0 . Sequence of the solutions (1) $x = x(t, t_n, x_n)$ is precompact for $t \in [t_n, t_n + d]$. There exists subsequence $t_k \to +\infty$ such that $x_k(t) \to u(t) : R^+ \to G$ is uniform by $t \in [0, d]$, with the function $x = u(t)$ be a solution ($u(0) = x_0$) of the limiting system $\dot{x} = Y(t, x)$ ($X_k(t_k + t, x) \to Y(t, x)$ as $t_k \to +\infty$). The set $L^+(t) = \{x : x = u(t)$ for every $u\}$ is called the limiting set for L relatively the sequence $t_k \to +\infty$. $L^+(t)$ is positive invariant set for the system $\dot{x} = Y(t, x)$.

We may prove the following theorems like the case $x = 0$ [2-4] .

Theorem 5. Assume that

(i) there exists a function $V = V(t, x) : V = V(t, x) \geq 0$ for $x \in G/L$, $V(t, x) \leq 0$ for $x \in L$;

(ii) the derivative of this function $\dot{V}^+_{(1)}(t, x) \leq -W(t, x) \leq 0$;

(iii) every limiting pair (Y, U) and set $V^{-1}_\infty(t, c)$ are so that the largest invariant subset M^+ of the set $\{V^{-1}_\infty(t, c) : c = const \geq 0\} \cap \{U(t, x) = 0\}$ with respect to system $\dot{x} = Y(t, x)$ is contained in L^+, $\{M^+(c) : c = const \geq 0 \geq\} \subset L^+$.

Then the set L^+ is asymptotically stable.

Theorem 6. Assume that

(i) there exists a function $V = V(t, x) : V(t, x) \geq h(d(x, L))$, $\dot{V}^+_{(1)}(t, x) \leq -W(t, x) \leq 0$;

(ii) there is a sequence $t_n \to +\infty$ such that the limiting pair (Y, U) and the set $V_\infty^{-1}(t, c)$, corresponding with this sequence, are such , that the set $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = const > 0\} \cap \{U(t, x) = 0\}$ contains no solution of the system $\dot{x} = Y(t, x)$.

Then the set L is asymptotically stable uniform by x_0.

Theorem 7. Assume that

(i) there exists a function $V = V(t, x) : V(t, x) \geq 0$ for $x \in \Gamma/L$, $V(t, x) \leq 0$ for $x \in L$, V is continuous by x uniformly respectively $t \in R^+$ in a neighbourhood of the set L;

(ii) the derivative $\dot{V}^+(t, x) \leq -W(t, x) \leq 0$;

(iii) for each limiting pair (Y, U) the set $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = const \geq 0\} \cap \{U(t, x) = 0\}$ contains no solution of the system $\dot{x} = Y(t, x)$.

Then the set L is uniformly asymptotically stable.

These theorems develop the results of [8,16] about asymptotic stability and instability in the sense, that only one Lyapunov function, which depends upon the time, is used .

PERTURBATION THEOREMS.

Consider the problem of the influence of the perturbation on the limiting behaviour of the solutions of (1) or on the stability of the positive invariant set L.

For this purpose consider system (1) together with the following perturbation system

$$\dot{x} = X(t, x) + Z(t, x) \tag{8}$$

where the vector-function $Z : R^+ \times G \to R^+$ satisfies the same existence conditions and condition (2) as the function X does.

Suppose that the perturbation is $Z = Z_1 + Z_2$. The function $Z_1 : R^+ \times G \to R^p$ is such that for every sequence $t_k \to +\infty$ and for each sequence of the continuous functions $u_k : [a, b] \to G$, which converges uniformly to $u : [a, b] \to G$, the following correlation takes place :

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b Z_1(t_k + t, u_k(t))dt = 0 \tag{9}$$

The function $Z_2 : R^+ \times G \to R^p$ is such that for all $(t, x) \in R^+ \times G$ the following inequality $\|Z_2(t, x)\| \leq q(t)$ holds, where

$$\int_0^\infty q(t)dt < +\infty \tag{10}$$

For this perturbation Z the family of the systems , which are limiting to the system (8), coincides with the family of the systems, which are limiting to the (1).

Theorem 8. Assume that
(i) function $V \in C^1(R^+ \times G, R)$ satisfies the conditions of theorem (3);
(ii) the perturbation Z_1 satisfies (9) and the inequality $(\partial V/\partial x) * Z_1 \leq 0$ for all $(t, x) \in R^+ \times G$;
(iii) if there exists the pertubation Z_2 satisfying (10) then there is a number $Q > 0$ such that $\|\partial V/\partial x\| \leq Q$ for all $(t, x) \in R^+ \times G$.

Then each solution of (8) $x = x(t, t_0, x_0)$ restricted by the compact $K \subset \Gamma$ inlimitedly approaches the set $\{M_*^+(c) : c = c_0 = const\}$ as $t \to +\infty$. (Here the set $M_*^+(c)$ is the same as in theorem (3)).

The following theorem , in which $G = R^n$ is supposed to be determination area for systems (1) and (8), is the modification of the result above.

Theorem 9. Assume that
(i) there is a function $V \in C^1(R^+ \times R^p, R)$ such that $V(t, x) \to +\infty$ for $x \to \infty$ is uniformly respectively $t \in R^+$ and derivative is the following $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -W(t, x) \leq 0$;
(ii) the perturbation Z_1 satisfies (9) and the inequality $(\partial V/\partial x) * Z_1 \leq 0$ is valid for all $(t, x) \in R^+ \times G$;
(iii) the perturbation Z_2 is valid and there is a number Q such that $| \partial V/\partial x | \leq Q(1 + V)$ for all $(t, x) \in R^+ \times G$.

Then each solution of system (8) $x = \tilde{x}(t, t_0, x_0)$ unlimitedly approaches the set $\{M_*^+(c) : c = const\}$ as $t \to +\infty$.

Similarly, one may consider the influence of perturbations of types (9) and (10) on the stability of the invariant set relatively the system (1) .

Theorem 10. Assume that
(i) there exists a function $V \in C^1(R^+ \times G, R^+)$ satisfying the conditions of

theorem 6;
(ii) the conditions (ii) and (iii) of the theorem 8 are valid .

Then the set L is eventually asymtotically stable relatively system (8) (is uniformly by x_0).

Using the results of [15] the following theorem may be proved .

Theorem 11. Assume that
(i) $\mu_1(t) = const$ and $\mu_2(t) = const$ in unequalities (3) ;
(ii) there exists a function $V \in C^1(R^+ \times G, R^+)$ satisfying the conditions of theorem 7;
(iii) the perturbation function Z satisfies the conditions (9) and (10).

Then the set L is uniformly eventually asymptotically stable relatively to system (8).

Consider the second order differential equation

$$\ddot{x} + k(t, x, \dot{x})\dot{x} + p^2(t)f(x) + z_1(t, x, \dot{x}) + z_2(t, x, \dot{x}) = 0 \qquad (11)$$

Consider the following set of assumptions.
(H_1) For any continuous function $x, y : R^+ \to R^2$

$$\int_a^b \|k(t, x(t), y(t))\|dt \leq \mu(b - a)$$

where $\mu : R^+ \to R^+$ is continuous function , $\mu(0) = 0$
(H_2) The function $p \in C^1(R^+, R^+)$ satisfies the conditions :
$0 < p(t) \leq p_1$ for all $t \in R^+$,$p(t) \geq p_0 > 0$, $t \in [t_n, t_n + h]$ $(t_n \to +\infty, h > 0)$.
(H_3) The function $f : R^+ \to R$ is such that if $x \to \infty$ then
$F(x) = \int\limits_0^x f(x)dx \to +\infty$
(H_4) For all $t \in R^+$ and $(x, y) \in R^2$ the following inequality holds is

$$\frac{k(t, x, y)}{p^2(t)} + \frac{\dot{p}(t)}{p^3(t)} \geq h(t) \geq 0$$

where the function $h : R^+ \to R^+$ is such that

$$\lim_{t,T \to +\infty} \inf \int_t^{t+T} h(s)ds > 0$$

(H_5) The perturbutions $z_1(t,x,y)$ and $z_2(t,x,y)$ are such that for all $t \in R^+$, $(x,y) \in R^2$ the following inequalities are valid $\|z_1(t,x,y)\| \leq q_1(t)$, $\|z_2(t,x,y)\| \leq q_2(t)$ whenever $\int\limits_0^\infty q_2(s)ds < +\infty$, $\int\limits_t^{t+1} q_1(s)ds \to 0$ as $t \to +\infty$.
(H_6) There exists an interval $[a,b]$ such that $f(x)$ if and only if $x \in [a,b]$.

Theorem 12. Let hypotheses $(H_1)-(H_5)$ be held , with $t_{n+1} - t_n \leq T = const$ and $yz_1(t,x,y) \geq 0$ for all $t \in R^+$ and $(x,y) \in R^2$. Then every solution of (11) unlimitedly converges to the set of the balance positions $\{\dot{x} = 0, x = const : f(x) = 0\}$ as $t \to +\infty$.

Theorem 13. Let hypotheses $(H_1)-(H_5)$ be held, with $yz_1(t,x,y) \geq 0$ for all $t \in R^+$ and $(x,y) \in R^2$. Then the set of the balance positions $\{\dot{x} = 0, x = c : a \leq c \leq b\}$ is globally eventually asymptotically stable by $(x_0, \dot{x}_0)$.

Theorem 14. Let hypotheses $(H_2)-(H_6)$ be held . Assume in addition that
(i) $\|k(t,x,y)\| \leq k_1$ for all $t \in R^+$ and$(x,y) \in R^2$;
(ii) $p(t) \geq p_0 > 0$ for all $t \in R^+$.

Then the set $\{\dot{x} = 0, x = c : a \leq c \leq b\}$ is globally uniformly eventually asymptotically stable relatively the equation (11).

Theorems 12-14 are the corollaryes of the theorem 9-10. They develop the results obtained in [10] of investigations of equation (11).

REFERENCES

Andreev, A.S. (1980). On the asymptotic stability and unstability of nonautonomous systems. Dokl. AN Us SSR,7,18-20.

Andreev, A.S. (1984). On the asymptotic stability and unstability of the zero solution of nonautonomous system. PMM,48,225-232.

Andreev, A.S. (1986). Sulla stabilita asintotica ed instabilita. Rend. Sem.Mat.Univ.Padova,75,235-245.

Artstein, Z. (1978). Uniform asymptotic stability via the limiting equations. J. Different. Equat.,27,172-189.
Ballien, R.J. and K.Peiffer (1978).Attractivity of origin for the equations $\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})\|x\|^{\alpha}\dot{x} + g(x) = 0$. J. of Math. Anal. and Appl.,65, 321-332.
Gambardella, L. and L.Salvadori (1973). On the asymptotic stability of set. Ricerche Mat.,20,143-150.
Ianiro, N. and C.Maffei (1981). On the asymptotic behaviour of the nonlinear equations $\ddot{x} + h(t, x, \dot{x})\dot{x} + p^2(t)f(x) = 0$. Nonlinear Differential Equations : Invariance, Stability and Bifurcation. Acad.Press, N.Y. pp.176-182.
Krasovskii, N.N. (1963). Stability of Motion, Stanford Univ. Press, Palo Alto ,Calif.
La Salle, J.P. (1968). Stability theory for ordinary differential equations. J. Different. Equat.,4,57-65.
La Salle, J.P. (1976). Stability of nonautonomous systems, J. Nonlinear Anal. TMA,1,83-91.
Matrosov, V.M. (1965). On the stability of sets of non isolated equilibrium points in nonautonomous systems, Trud. Kazanskogo Aviatsionnogo Instituta,89,20-32.
Miller, R.K. Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear differential equations, Trans. Amer. Math.Soc.,115,400-416.
Onuchic, N. and L.C. Pavlu (1980). Invariance, asymptotic behavior and stability properties for ordinary differential equations, Tohoku Math. J.,32,217-224.
Peng, T.K.C. (1972) Invariance and stability for bounded uncertain systems, SIAM J. Control,10,679-690.
Rouche, N., P. Habets and M. Laloy. (1977). Stability Theory By Liapunov's Direct Method,Springer, N.Y.-H.B.
Sell, G.R. (1967) Nonautonomous differential equations and topological dynamics, Trans. Amer. Mat. Soc.,127,241-283.
Shestakov, A.A. and Yu.N. Merenkov (1981) Localization of the limit set for a nonautonomous differential system by means of Lyapunov Functions, Differentsialnye Uravneniya, 17,2017-2028.
Strauss, A. and J.A. Jorke. (1967) Perturbation theorems for ordinary differential equations,J. Different. Equat.,3,15-30.
Wakeman, D.R. (1975) An application of the topological dynamics to obtain a new invariance property for nonautonomous ordinary differential

equations.J.Differ.Equat.,17,259-295.
Yoshizawa T. (1966) Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo : Mat. Soc. Japan.

УДК 531.36

THE STABILIZATION OF EQUILIBRIUM STATE OF NONLINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

S.P. Bezglasnyi

Abstract. We consider a controlled nonlinear mechanical system described by the Hamilton's canonical equations. We determine the control u acting to the mechanical system which allow to the asymptotic stability of the equilibrium state of the system. Sufficient conditions for asymptotic stability are derived. We solve the problem of stabilization by the direct Lyapunov's method and the method of limiting functions and systems. In this case we can use the Lyapunov's functions having nonpositive derivatives.

Key words and Phrases: controlled mechanical system, stabilization, equilibrium state, Lyapunov's function, limiting functions.

1. Introduction

The behavior of many systems of importance in engineering practice is governed by Hamilton's canonical equations [1]

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(p,q)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q} \end{aligned} \tag{17}$$

where $q = (q_1, \ldots, q_n)^\top$ is the n-vector of generalized coordinates, $p = (p_1, \ldots, p_n)^\top$ is the n-vector of generalized momenta and $H(p,q)$ is the Hamiltonian of the system. Here $\top$ denotes transpose of a matrix.

We assume that

$$\frac{\partial H(0,0)}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial H(0,0)}{\partial q} = 0 \tag{18}$$

That is, $p = q = 0$ is an equilibrium state of the system (17). It is well known that $p = q = 0$ of (17) is stable in the sense of Lyapunov [2] if $H(p,q)$ is positive definite. Indeed, along any trajectory of (17), we have that

$$\frac{dH(p,q)}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^\top \dot{q} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^\top \dot{p} \tag{19}$$

Using (17) in (19), we immediately see that $dH/dt = 0$. Therefore, when $H(p,q)$ is positive definite, the choice of the Lyapunov function $V = H(p,q)$ establishes stability of the origin of (17). Of course, stability of the origin implies that for small perturbations in the initial state $(q(0), p(0))$ the motion of the system (17) remains bounded.

In many engineering problems, mere stability of the origin is not enough, and it is required that the trajectory of the system converge to the origin as time goes to ∞ if the initial state is perturbed from zero. For such cases, additional control signal are provided in the system (17) to give a modified system of the form

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(p,q)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q} + Bu \end{aligned} \tag{20}$$

Where B is a constant $n \times m$ matrix and $u(t) \in R^m$ is the control. The form of B depends on the configuration of the actuators in the system.

We are interested in obtaining control law of the form

$$u(t) = u(t, q(t), p(t)) \in R^m, \quad u(t,0,0) = 0 \tag{21}$$

such that the equilibrium state $q = p = 0$ of the system (20) and (21) is asymptotically stable. Physically, selection of u may be seen as the problem of providing appropriate damping (active or passive) in the conservative system (17) such that the origin of the modified system becomes asymptotically stable. However, for general complex nonlinear system, it is far from trivial to find an appropriate control law to ensure asymptotic stability.

The problem of stabilization of conservative linear and a restricted class of nonlinear Hamiltonian systems has been considered [3], [4]. Using well known invariance principle of LaSalle [5], sufficient conditions for the asymptotic stability and instability of the origin of nonconservative Hamilton's systems are derived in [6]. The problem of stability and stabilization of equilibrium position of non-autonomous Lagrang's systems are solved in [7], [8]. In this work we will state and solve the problem of stabilization of zero state (equilibrium position) of non-autonomous Hamilton's systems on the basis of the direct Lyapunov method [2] and the method of limiting functions and systems of equations [9],[10]. This allows to extend the class of the Lyapunov's functions to the functions with nonpositive derivatives.

The organization of the paper is as follows. Section 2 presents the problem of stabilization of equilibrium state of non-autonomous mechanical system described by the system of differential equations in Hamilton's canonical form. Section 3 contains additional assumptions and constructions. In section 4 we obtain and prove general theorems about the stabilization of equilibrium position of Hamilton's systems. The obtained theorems generalize and develop the results of [6], [7], [8], [11].

2. Formulation of the problem

We consider a controlled system, the motion of which described by the system of differential equations in Hamilton's form

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} + Bu \end{aligned} \tag{22}$$

where $q = (q_1, \ldots, q_n)^\top$ is the n-vector of generalized coordinates in the real linear space R^n with norm $\|q\|$, $p = (p_1, \ldots, p_n)^\top$ is the n-vector of generalized momenta, $p \in R^n$ with norm $\|p\|$ and $H(t,q,p)$ is the Hamiltonian of the system. The right-hand side in (22) is defined for a class $U = \{u(t,q,p) : u(t,0,0) = 0\}$ of control actions $u(t,q,p) \in C(G)$, $G = R^+ \times \Gamma$, where $R^+ = [0, +\infty[$, $\Gamma = \{\|q\| < L, \|p\| < L, L = const > 0\}$. It is continuous and satisfies the conditions for the existence and uniqueness of solutions in G. We now state the problem on stabilization of the equilibrium position of system (22). Namely, we have to find the control $u(t,q,p) \in U$ and the conditions on the right-hand side of system (22) making the zero solution $q = p = 0$ of (22) asymptotically stable.

3. Additional assumptions and constructions

Along the solution of (22), we have that

$$\frac{dH(t,q,p)}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^\top \dot{q} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^\top \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^\top \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^\top \left(-\frac{\partial H}{\partial q} + Bu\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^\top Bu + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{23}$$

We shall consider three classes of control vectors u^0 as given below

$$u^0(t,q,p) = K\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}, \ \ D = BK + (BK)^\top \leq 0 \tag{24}$$

$$u^0(t,q,p) = K\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}, \ \ BK \leq 0 \tag{25}$$

$$u_i^0 = \begin{cases} u_{i1} & if\ -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)^\top b_i < u_{i1} \\ -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)^\top b_i & if\ u_{i1} \leq -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)^\top b_i \leq u_{i2} \\ u_{i2} & if\ -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)^\top b_i > u_{i2} \end{cases} \tag{26}$$

where $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_m^0)^\top$ and $B = (b_1, \ldots, b_m)$,

$$u_{i1} \leq u_i^0(t) \leq u_{i2}, \ \ u_{i1} < 0, \, u_{i2} > 0.$$

Suppose that for same $u^0(t,q,p)$ the right-hand side of (22) is bounded on each compact set $M \subset \Gamma$ and satisfies the Lipschitz condition uniformly in (q,p) with respect to t. Then it satisfies the precompactness conditions in G in some functional space F_Φ [9] and with the system of equations (22)one can associate [9] a family of limit systems

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \left(\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}\right)^*, \\ \dot{p} &= -\left(\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q}\right)^* + Bu^* \end{aligned} \tag{27}$$

for which

$$\left(\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}\right)^* = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t \left(\frac{\partial H(t_n+\tau,q,p)}{\partial p}\right) d\tau\right) \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q}\right)^* = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t \left(\frac{\partial H(t_n+\tau,q,p)}{\partial q}\right) d\tau\right) \tag{29}$$

$$u^* = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t u(t_n+\tau,q,p)d\tau\right) \tag{30}$$

Let by analogy function dH/dt (23) satisfies the precompactness conditions in G in some functional space F_Ω and one can associate with it a family of limit functions $\Omega(t,q,p)$ defined by

$$\Omega(t,q,p) = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t \left(\frac{dH(t_n+\tau,q,p)}{dt}\right)d\tau\right) \tag{31}$$

Continuous monotonically strictly increasing functions in the section [0,L] such that $h(0) = 0$, that is, Hahn type functions [12], will be denoted by $h(\|x\|)$.

4. Basic results

We shall present a solution of the above problem on stabilization of equilibrium position of mechanical systems based on Lyapunov's direct method.

Theorem 1. Suppose that the following conditions hold for system (22) with control function $u^0(t,q,p)$ (24) - (26):

1) all the functions in the right-hand side of (22) are bounded on the set G for any $L<\infty$ and satisfy the Lipshitz condition with respect to (q,p) for any $L<\infty$;

2) Hamiltonian $H(t,q,p)$ is a positive definite and admits of an infinitesimal upper bound

$$h_1(\|(q,p)^\top\|) \le H(t,q,p) \le h_2(\|(q,p)^\top\|);$$

3) it is true along the solution of (22)

$$\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial t} \le 0;$$

4) for any limit set $\left(\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^*, \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^*, u^*, \Omega\right)$ corresponding to $\left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}, u^0, \frac{dH}{dt}\right)$ the set $\{\Omega(t,q,p) = 0\}$ does not contain any solutions of the limit system (27), other than $q = p = 0$.

Then $u^0(t,q,p)$ (24) - (26) is a stabilizing control function for zero state of system (22). Further, the equilibrium position $q = p = 0$ is uniformly asymptotically stable.

Proof. Under condition 1 of theorem 1 equations of (22) with control (24) - (26) are precompact and regular. Then the limiting equations to them have the analogous form (27). Evidently, the zero state $q = p = 0$ is the solution of (22) with control (24) - (26).

For the derivative of the function $V(t,q,p) = H(t,q,p)$ in view of (22) with (24) - (26) we obtain the estimate

$$\dot{V}_{(24)} = \dot{H}_{(24)} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\top} BK \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\top} D \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \tag{32}$$

$$\dot{V}_{(25)} = \dot{H}_{(25)} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\top} BK \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \tag{33}$$

$$\dot{V}_{(26)} = \dot{H}_{(26)} \leq -\sum_{i=1}^{m} u_i^2 + \frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \tag{34}$$

for all $(q,p) \in R^{2n}$ where $\dot{H}_{(24)-(26)}$ denotes the derivative of $H(t,q,p)$ along the solution of (22) with control law (24)-(26).

The uniform asymptotic stability of the zero solution follows now from theorem 3 in [10]. The theorem is proved.

Definition 1 [10]. The set $\dot{H}_{\infty}^{-1}(t,c)$ is a set of points $(q,p) \in R^{2n}$ such that is true

$$\lim_{t \to +\infty} H(t,q,p) = c,$$

where c is a constant.

Theorem 2. Suppose that the following conditions hold for system (22) with control function $u^0(t,q,p)$ (24) - (26):

1) all the functions in the right-hand side of (22) are bounded on the set G for any $L < \infty$ and satisfy the Lipshitz condition with respect to (q,p) for any $L < \infty$;

2) Hamiltonian $H(t,q,p)$ is a positive definite

$$H(t,q,p) \geq h_1(\|(q,p)^{\top}\|);$$

3) it is true along the solution of (22)

$$\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial t} \leq 0;$$

4) there are numbers L_0 and L_1 $(0 < L_0 < L_1)$ such that $\sup(H(t,q,p)$ when $\|(q,p)^\top\| < L_0) < h_1(L_1)$;

5) there is at least one sequence $t_n \to +\infty$ for which the limit set $\left(\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^*, \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^*, u^*, \Omega\right)$ corresponding to $\left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}, u^0, \frac{dH}{dt}\right)$ and the corresponding set $\dot{H}_\infty^{-1}(t,c)$ are such that for any $c = c_0 = const > 0$ the set $\{\dot{H}_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{\Omega(t,q,p) = 0\}$ contains no solutions of the limit system (27).

Then $u^0(t,q,p)$ (24) - (26) is a stabilizing control function for zero state of system (22). Further, the equilibrium position $q = p = 0$ is asymptotically stable uniformly in (q_0, p_0).

Proof. Under condition 1 of theorem 1 equations of (22) with control (24) - (26) are precompact and regular. Evidently, the zero state $q = p = 0$ is the solution of (22). We have inequality (32) - (34) for the derivative of $H(t,q,p)$. By conditions 2 and 4 it follows that the solution $q = p = 0$ is stable. The solution of (22) from the domain $\Gamma_1 = \{\|(q,p)^\top\| < L_0\}$ will be bounded, $\|(q(t,t_0,q_0,p_0), p(t,t_0,q_0,p_0))^\top\| \le L_1$ for all $t \ge t_0$.

Let $(q,p) = (q(t,t_0,q_0,p_0), p(t,t_0,q_0,p_0))$ be a solution of (22) in Γ_1. By condition 2 of the theorem and (32) - (34) $H(t) = H(t, q(t,t_0,q_0,p_0), p(t,t_0,q_0,p_0)) \to c_0$ as $t \to +\infty$. Let $t_n \to +\infty$ be a sequence determining $\left(\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^*, \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^*, u^*, \Omega\right)$ and $H_\infty^{-1}(t,c)$ such that $(q(t_n), p(t_n)) \to (q^*, p^*)$ as $t_n \to +\infty$. We form the sequence of functions

$$(q_{n_k}(t), p_{n_k}(t)) = (q(t_{n_k} + t), p(t_{n_k} + t)).$$

By [9] the sequence of functions $\{(q_{n_k}(t), p_{n_k}(t))\}$ defined for $t_{n_k} \ge t_0$ will converge to a solution $(q,p) = \varphi(t) :]-\infty, +\infty[\to \Gamma$ of the system (27) uniformly in each interval $[-T,T]$. Taking the limit as $t_{n_k} \to +\infty$, as in [10], we obtain

$$\varphi(t) \in \{\dot{H}_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{\Omega(t,q,p) = 0\}$$

But by condition 5 of the theorem this is possible only if $c_0 = 0$. So along each solution $(q(t,t_0,q_0,p_0), p(t,t_0,q_0,p_0))$: $(q_0,p_0) \in \Gamma_1$ of (22)

$$H(t, q(t,t_0,q_0,p_0), p(t,t_0,q_0,p_0)) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to +\infty. \tag{35}$$

It follows that the solution $q = p = 0$ is asymptotically stable uniformly with respect to (q_0, p_0) [13]. The theorem is proved.

The obtained theorems develop the results of [6], [7], [8], [10].

This research was supported financially by the Russian Foundation for Basic Research (99-01-01005, 02-01-00877).

REFERENCES

1. H. Goldstein, Classical Mechanics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1950.
2. D.R. Merkin, Introduction in the theory of stability of motion. Nauka, Moscow, 1987.
3. J.A. Walker, W.E. Schmitendorf, A simple test for asymptotic stability in partially dissipative symmetric systems. Trans. ASME Ser. G.J. Dynamic Systems, Meas., and Control, 95(1973), pp. 1120-1121.
4. R.K. Miller, A.N. Michel, Asymptotic stability of systems: results involving the system topology. SIAM J. Control and Opt., Vol.18(1980)
5. J.P. LaSalle Asymptotic stability criterion. Proc. Symp. in Applied Mathematics, Vol. 13(1962), AMS, Providence, RI, pp. 299-307.
6. S.N. Singh, On stabilization of nonlinear hamiltonian systems and nonconservative systems in elasticity. Proc. 20th Conf. Decis. and Contr. and Symp. Adapt. Processes, San Diego, Vol. 1-3(1981), pp. 290-295.
7. Andreev A.S. The stability of the equilibrium position of a non-autonomous mechanical system. Prikl. Mat. Mekh., 60(1996), pp. 388-396.
8. A.S. Andreev, S.P. Bezglasnyi, The stabilization of controlled systems with a guaranteed estimate of the control quality. Prikl. Mat. Mekh., 61(1997), pp. 41-47.
9. Z. Artstein, Topological dynamics of an ordinary equations. J. Differ. Equat., 23(1977), pp. 216-223.
10. Andreev A.S. The asymptotic stability and instability of the zero solution of a non-autonomous system. Prikl. Mat. Mekh., 48(1984), pp. 225-232.

11. S.P. Bezglasnyi, On stabilization of program motions of controlled mechanical systems. Proceedings of the 22 Yugoslav Congress of theoretical and applied mechanics, Vrnjacka Banja, June 2-7, 1997, pp.107-112.

12. N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, Stability theory by Lyapunov's direct method. Springer, New York, 1977.

13. N.N. Krasovskii, Some problems of the theory of stability of motion. Fizmatgiz, Moscow, 1959.

ON THE STABILITY OF THE GENERALIZED STEADY MOTIONS [14]

Giancarlo CANTARELLI

Abstract. – Stability criteria for the generalized steady motions of rheonomic holonomic systems with ignorable coordinate are provided. The Lyapunov direct method is applied, by introducing two different Lyapunov functions. A mechanical example illustrates the theorems.

1. Introduction

Let us consider a holonomic mechanical system S with bilateral and frictionless time-dependent constraints, $n+m$ $(n \geq 1\,,\ m \geq 1)$ degrees of freedom and independent lagrangian coordinates given by the row vectors $(\mathbf{q},\mathbf{z})^T = (q_1\,, \dots, q_n\,, z_1\,, \dots, z_m)$. The m coordinates $\mathbf{z}$ are called *ignorable*, and the n coordinates $\mathbf{q}$ are called *positional.*
Let $T = T_2 + T_1 + T_0$ be the kinetic energy of the system, being

$$\left[\begin{array}{lllll} T_2 & = & T_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) & = & \dfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}(t,\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{z}}\,\mathbf{B}^T(t,\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} + \dfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{z}}^T\mathbf{C}(t,\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{z}} \\ & & & & \\ T_1 & = & T_1(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) & = & -\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{g}(t,\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{z}}^T\mathbf{f}(t,\mathbf{q}) \\ & & & & \\ T_0 & = & T_0(t,\mathbf{q}) & & \end{array}\right. \tag{1.1}$$

All these functions are defined and of class $\mathcal{C}^1$ on $I \times \Omega$, where $I = (\tau\,, \infty)$ for some $\tau \in \Re$, and Ω is an open connected subset of $\Re^n$ containing the origin. Moreover, T_2 is a quadratic form in the generalized velocities, whose symmetric $(n+m)\times(n+m)$ matrix, written out into bloks as

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathbf{A}(t,\mathbf{q}) & \mathbf{B}(t,\mathbf{q}) \\ & \\ \mathbf{B}^T(t,\mathbf{q}) & \mathbf{C}(t,\mathbf{q}) \end{array} \right\|$$

is positive definite respect to $\mathbf{q}$.

Denote by $\Pi = \Pi(t,\mathbf{q})$ the (generalized) potential energy of all forces which are derived from a potential function. We assume that $\Pi(t,\mathbf{q})$ is a function defined and of class $\mathcal{C}^1$ on $I \times \Omega$.

[14]Universitá di Cagliari, Viale Merello 92 – 09123 Cagliari (Italy)

The system may also be subjected to *dissipative* forces acting only in the degrees of freedom corresponding to the positional coordinates, whose lagrangian components $\mathbf{Q}^T = (Q_1, \dots, Q_n)$ are continuous functions of $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in I \times \Omega \times \Re^n$. Moreover, let us assume the uniqueness of the solutions of the Lagrange equations of the motion.

2. Routh equations

The ignorable coordinates give rise to the first integrals of the generalized momenta

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \equiv \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(t, \mathbf{q}) + \dot{\mathbf{z}}\, \mathbf{C}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) - \mathbf{f}^T(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = \mathbf{c}^T \qquad (2.1)$$

where $\mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_m)$ are m arbitrary constants. The integrals (2.1) can be solved with respect to the ignorable velocities $\dot{\mathbf{z}}$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}^{-1} \left(\mathbf{c} + \mathbf{f} - \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{q}}\right) \qquad (2.2)$$

Denoting as usual by $\mathcal{L}$ the lagrangian function, the Routh function is defined as

$$R(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) = \left[\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \dot{\mathbf{z}}\right]_{\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{c} + \mathbf{f} - \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{q}}\right)} \qquad (2.3)$$

which is the sum of the three terms R_2, R_1, R_0, being

$$\left[\begin{array}{lll} R_2 = & R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & = \dfrac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\right) \dot{\mathbf{q}} \\ R_1 = & R_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) & = \left[(\mathbf{c} + \mathbf{f})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T - \mathbf{g}^T\right] \dot{\mathbf{q}} \\ R_0 = & R_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) & = T_0(t, \mathbf{q}) - \Pi(t, \mathbf{q}) - \dfrac{1}{2} (\mathbf{c} + \mathbf{f})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{c} + \mathbf{f}) \end{array}\right. \qquad (2.4)$$

The Routh equations

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \dfrac{\partial R}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\mathbf{c}} = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

possess m first integrals time-independent, which is right to construct Lyapunov functions.

Let us denote by $\|\cdot\|$ the Euclidean norm, and by $S_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q} \in \Re^n : \|\mathbf{q}\| < \rho\}$, $S_{\dot{\mathbf{q}}} = \{\mathbf{q} \in \Re^n : \|\dot{\mathbf{q}}\| < \rho\}$ with some sufficiently small number $\rho > 0$. In the following of the paper we assume that there exists a constant $\alpha > 0$ such that

$$R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \alpha \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \qquad on \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \tag{2.6}$$

3. Hypothesis on R_1

Let us consider the linear term in the positional velocities $R_1 = \mathbf{h}^T(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})\,\dot{\mathbf{q}}$, where for semplicity we have put

$$\mathbf{h}^T(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c} + \mathbf{f})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T - \mathbf{g}^T \tag{3.1}$$

In the present paper we assume that there exist two functions: a scalar function $v = v(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})$ defined and continuous on $I \times \Omega \times \Re^m$, and of class $\mathcal{C}^2(t, \mathbf{q})$, and a vector function $\mathbf{h}_* = \mathbf{h}_*(\mathbf{q}, \mathbf{c})$ defined and continuous on $\Omega \times \Re^m$, and of class $\mathcal{C}^1(\mathbf{q})$, satisfying the following condition

$$\mathbf{h}^T(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{h}_*(\mathbf{q}, \mathbf{c}) \tag{3.2}$$

In [**3**] we have showed that, by virtue of condition (3.2), the Routh function $R(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c})$ can be replaced by the following one

$$\tilde{R}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) = R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}_*^T(\mathbf{q}, \mathbf{c})\,\dot{\mathbf{q}} + \left(R_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) - \frac{\partial v(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})}{\partial t}\right) \tag{3.3}$$

where the linear term in the velocity $\dot{\mathbf{q}}$

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) = \mathbf{h}_*^T(\mathbf{q}, \mathbf{c})\,\dot{\mathbf{q}}$$

is *time-independent.*

Therefore, under condition (3.2), we can construct a Routh function $\tilde{R} = \tilde{R}_2 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_0$ such that

$$\frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial t0} \equiv 0 \tag{3.4}$$

In the following, for semplicity, without further mention we will denote by R the Routh function, assuming that this function satisfies condition (3.4).

4. Generalized steady motions

Let us assume that the following condition holds

$$\left[-\frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial t} + \frac{\partial R_0}{\partial \mathbf{q}} \right]_{\mathbf{q}=0,\,\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}} = 0 \tag{4.1}$$

where $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})$ is given by (3.1). This condition ensures that the Routh equations possess the "static"solution

$$\mathbf{q}(t) = 0\,, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = 0\,, \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}\,, \qquad \forall t \geq t_0 \in I \tag{4.2}$$

to which corresponds the following solution of the Lagrange equations

$$\mathbf{q}(t) = 0\,, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = 0\,, \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_0^{-1}(t)\big(\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{f}_0(t)\big)\,, \qquad \forall t \geq t_0 \in I \tag{4.3}$$

(where $\mathbf{C}_0(t) := \mathbf{C}(t, 0)$, $\mathbf{f}_0(t) := \mathbf{f}(t, 0)$) which is called *generalized steady motion* [**1**,**2**].

The problem we are interested in is the study of the Lyapunov stability of the generalized steady motion (4.3) which, under appropriate hypoteses [**1** , **2**], can be reduced to the study of the Lyapunov stabilty of the corresponding solution (4.2) of the Routh system.

5. Basic identities

Let us put $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}$, and let us consider the following function $W = W(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})$, introduced by the author in [**3**]

$$W(t, \mathbf{q}, \mathbf{b}) = [-\, R_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) + R_0(t, 0, \mathbf{c})]_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}+\mathbf{b}} \tag{5.1}$$

We show that along every motion of the mechanical system the following two identities hold

$$\frac{d}{dt}\,[R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + W(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})] = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial t}\,(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$\frac{d}{dt}\,R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial t}\,(R_2 + R_1) - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}} \tag{5.3}$$

6. First Liapunov function

Let us define the set $S_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{b} \in \Re^m : \|\mathbf{b}\| \leq \rho\}$, with some sufficiently small number $\rho > 0$.

Teorema 6.1 – *If the following conditions are satisfied*

(i) the partial derivatives $\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}$ *are bounded on* $I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}}$*;*
(ii) the function $W(t, \mathbf{q}, 0)$ *is positive definite in* $\mathbf{q}$*;*
(iii) a scalar function $p = p(t) > 0$ *, defined, bounded and of class* C^1 *on* I*, exists such that*

$$\frac{\partial W}{\partial t} \;\leq\; \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\, W \qquad in \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}} \tag{6.1}$$

$$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{q}} \;\leq\; \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\, R_2 + \frac{\partial R_2}{\partial t} \qquad in \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \tag{6.2}$$

then the generalized steady motion (4.3) *is stable with respect to* $\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}$. *Moreover, if the following further conditions hold*
(iv) the coefficients of the quadratic form $R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ *and the partial derivatives* $\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}$ *are bounded on* $I \times S_{\mathbf{q}}$*;*
(v) the first integrals (2.1) *are uniformly continuous in corrispondence to the generalized steady motion* (4.3) *and the function* $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c})$ *is uniformly continuous in corrispondence to the "static"solution* $\mathbf{q} = 0$, $\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$*, then the generalized steady motion* (4.3) *is uniformly stable with respect all the variables* $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{z}}$.

We can prove the theorem by choosing as Lyapunov function

$$V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) \;=\; \max\left\{\frac{1}{p(t)}\,[R_2 + W]\ ,\ \|\mathbf{b}\|\right\} \tag{6.3}$$

and verifying that all the conditions of Corollary 5.1 in [**1**] are satisfied.

In particular, it is easy to verify that the Lyapunov function (6.3) is positive definite in $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{b}$. Moreover, taking into account identity (5.2), and the hypothesis $\partial R_1 \partial t \equiv 0$, we obtain

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{p(t)}\,[R_2 + W]\right\} \;=$$

$$= -\frac{\dot{p}(t)}{p^2(t)}\,[R_2 + W] + \frac{1}{p(t)}\left[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{1}{p(t)}\left[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\,R_2 - \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\,W\right]$$

from which follows, by virtue of the conditions (6.1), (6.2) of the theorem,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{p(t)}\,[R_2 + W]\right\} \le 0 \qquad in \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}} \tag{6.4}$$

and this implies that the total derivative of the Lyapunov function $V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{b})$ is not positive on the set $I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$.

7. Second Lyapunov function

In the present section we denote by $W_0 = W_0(\mathbf{q}, \mathbf{b})$ a scalar function defined and of class $\mathcal{C}^1$ on $\Re^n \times \Re^m$, and by $P = P(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})$ a scalar function defined and of class $\mathcal{C}^2$ on $I \times \Re^n \times \Re^m$.

Moreover, we assume that there exist two real constants P_0 and P_1 for wich

$$0 < P_0 \le P(t,0,0) \le P_1 < \infty$$

and that the derivatives $P_t(t,0,0)$, $P_q(t,0,0)$, $P_b(t,0,0)$, $P_{tq}(t,0,0)$, $P_{tb}(t,0,0)$ are bounded on I.

Remark 7.1 – The previous conditions ensure that for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ (and consequently, two sets $S_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{b} \in \Re^m : \|\mathbf{q}\| \le \rho\}$ and $S_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{b} \in \Re^m : \|\mathbf{b}\| \le \rho\}$) such that

$$\frac{P_t(t,\mathbf{q},\mathbf{b})}{P(t,\mathbf{q},\mathbf{b})} \ge \frac{P_t(t,0,0)}{P(t,0,0)} - \varepsilon \qquad on \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}}$$

Putting $p(t) := P(t,0,0)$, we obtain the following theorem.

Theorem 7.1 – *If the following conditions are satisfied*

(i) the partial derivatives $\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}$ *are bounded on* $I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}}$*;*

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{b}) = P(t,\mathbf{q},\mathbf{b})\,\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{b}) \qquad on \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}} \tag{ii}$$

(iii) the function $W_0(\mathbf{q}, 0)$ *is positive definite in* $\mathbf{q}$*;*

(iv) a real strictly positive number ε *exists such that*

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{q}} \le \frac{\partial R_2}{\partial t} + \left[\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} - \varepsilon\right] R_2 \qquad on \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}}$$

then the generalized steady motion (4.3) is stable with respect to $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$. *Moreover, if the following further conditions hold* *(v) the coefficients of the quadratic form* $R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ *and the partial derivatives* $\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}$ *are bounded on* $I \times S_{\mathbf{q}}$*;*

(vi) the first integrals (2.1) *are uniformly continuous in corrispondence to the generalized steady motion* (4.3) *and the function* $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c})$ *is uniformly continuous in corrispondence to the "static"solution* $\mathbf{q} = 0\,,\ \dot{\mathbf{q}} = 0\,,\ \mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$, *then the generalized steady motion* (4.3) *is uniformly stable with respect all the variables* $\mathbf{q}\,,\ \dot{\mathbf{q}}\,,\ \dot{\mathbf{z}}$.

Also this proof is based on the Corollary 5.1 in [1]. We choose the following Lyapunov function

$$V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) \;=\; \max\left\{\frac{1}{P(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})}\, R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \,+\, W_0(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \;\;,\;\; \|\mathbf{b}\|\right\}$$

Easily we see that this function is positive definite in $\mathbf{q}\,,\ \dot{\mathbf{q}}\,,\ \mathbf{b}$. Moreover, by deriving with respect to time we have, taking into account identity (5.3),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P}\, R_2 \,+\, W_0\right) =$$

$$= -\frac{1}{P^2}\,(P_t \,+\, P_{\mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}})\; R_2 \,+\, \frac{1}{P}\left(\mathbf{Q}^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \,-\, \frac{\partial\, R_2}{\partial\, t} \,-\, \frac{\partial\, W}{\partial\, \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}}\right) \,+\, \frac{\partial\, W_0}{\partial\, \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}} =$$

$$= \frac{1}{P}\left[\mathbf{Q}^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \,-\, \frac{\partial\, R_2}{\partial\, t} \,-\, \frac{\partial\, W}{\partial\, \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}} \,-\, \frac{1}{P}\,(P_t \,+\, P_{\mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}})\; R_2 \,+\, P\,\frac{\partial\, W_0}{\partial\, \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}}\right]$$
$$\textit{on } I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$$

from which follows, by virtue of (7.1),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P}\, R_2 + W_0\right) = \frac{1}{P}\left[\mathbf{Q}^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \,-\, \frac{\partial R_2}{\partial t} \,-\, \frac{1}{P}\,(P_t \,+\, P_{\mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}})\; R_2\right]$$
$$\textit{in } I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}} \tag{7.2}$$

Let ε be the constant satisfying condition (v). We can choose $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ appropriately small, in such a way as to obtain the following two inequalities (for the first one, see Remark 7.1)

$$\frac{P_t(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})}{P(t, \mathbf{q}, \mathbf{b})} \;\geq\; \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \,-\, \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{on} \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\mathbf{b}} \;\;,$$

$$\frac{P_{\mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{b})\,\dot{\mathbf{q}}}{P(t,\mathbf{q},\mathbf{b})} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \quad on\ I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$$

By virtue of such inequalities we see that

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} - \varepsilon \;\leq\; \frac{P_t(t,\mathbf{q},\mathbf{b}) \,+\, P_{\mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{b})\,\dot{\mathbf{q}}}{P(t,\mathbf{q},\mathbf{b})} \quad in\ I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$$

Therefore the condition (iv) of the theorem implies that

$$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{q}} \;\leq\; \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{P}\,(P_t + P_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})\;R_2 \qquad in \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$$

and thus we finally obtain, by virtue of (7.2),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P}\,R_2 + W_0\right) \;\leq\; 0 \qquad on \quad I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$$

As in the previous case, we so recognize that the total derivative of the Lyapunov function $V(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{b})$ is not positive on the set $I \times S_{\mathbf{q}} \times S_{\dot{\mathbf{q}}} \times S_{\mathbf{b}}$.

8. Example

Let S be a holonomic mechanical system composed by a thin rod, whose ends are A and B, by a circular ring, whose center is C, and by an element P.

The system S is moving on the *horizontal* plane Oxy of an Earth frame $Oxyz$, whose z axis is vertical. The end A of the rod is fixed on the origin. This constraint is realized by a cylindrical bearing. The other end B is overlapped to an element of the ring, and also this constraints is realized by a cylindrical bearing. The element P is constrained to move without friction on the ring.

Let $\ell = \ell(t)$ be both the lenght of the thin rod and the radius of the ring. By m we denote the mass of the element P, while for simplicity we assume negligible both the mass of the thin rod and the mass of the circular ring.

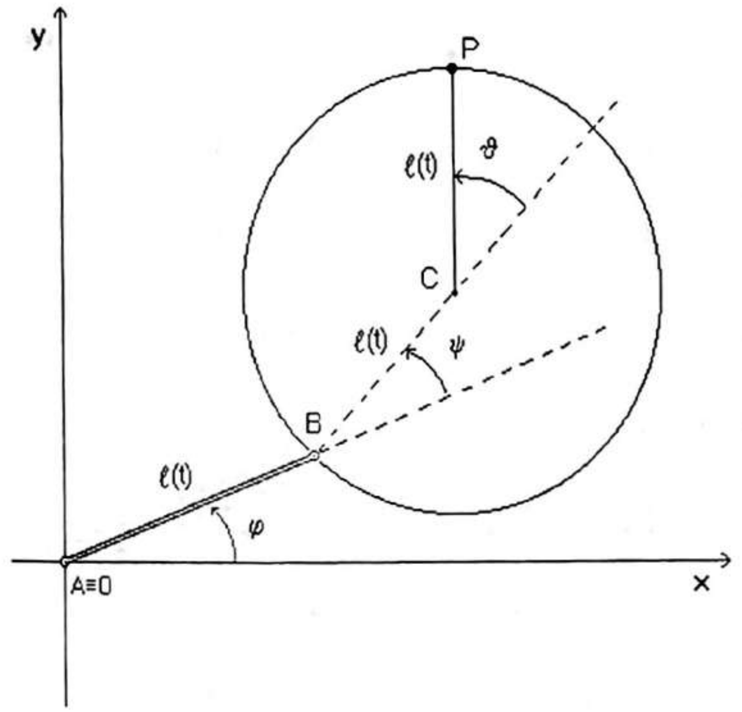
Finally, we assume the scalar function $\ell(t)$ of class $C^1(I)$, and such that

a) two real constants $\ell_1 > 0$ and $\ell_2 > \ell_1$ exist such that $\ell_1 \leq \ell(t) \leq \ell_2$ in I;

b) $\dot{\ell}(t) < 0$ in I;

c) $\lim_{t\to\infty} \ddot{\ell}(t) = 0;$

d) a real constant $\gamma > 0$ exists such that $\left| \dfrac{\dddot{\ell}(t)}{\ddot{\ell}(t)} \dot{\ell}(t) \right| \leq \gamma$ in I.



Let φ, ψ and ϑ be respectively the angle between AB and the x axis, the angle between BC and AB , and the angle between CP and BC.

Disregarding the terms only depending on the time, we obtain the following Lagrange function

$$\mathcal{L}(t, \vartheta, \psi, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \ell^2(t) \dot{\vartheta}^2 + m \ell^2(t) (1 + \cos\vartheta) \dot{\psi}^2 +$$

$$m \ell^2(t) (1 + \cos\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\psi} + m \ell^2(t) \Big[1 + \cos\vartheta + \cos(\vartheta + \psi)\Big] \dot{\vartheta} \dot{\varphi} +$$

$$+ m \ell^2(t) \Big[2 + 2\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta + \psi)\Big] \dot{\psi} \dot{\varphi}$$

$$+ \frac{1}{2} m \ell^2(t) \Big[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)\Big] \dot{\varphi}^2 -$$

$$- m \ell(t) \dot{\ell}(t) \Big[\sin\vartheta + \sin(\vartheta + \psi)\Big] \dot{\vartheta}$$

$$- m\,\ell(t)\,\dot{\ell}(t)\,\Big[\sin\psi + \sin(\vartheta + \psi)\Big]\,\dot{\psi} + m\,\dot{\ell}^2(t)\,\cos\vartheta +$$

$$+ m\,\dot{\ell}^2(t)\,\cos\psi + m\,\dot{\ell}^2(t)\,\cos(\vartheta + \psi) \tag{8.1}$$

We observe that the lagrangian coordinates ϑ and ψ are positional, while the lagrangian coordinate φ is ignorable. Thus, it is $\mathbf{q}^{T} = (\vartheta\,,\psi)$, $\mathbf{z} = (\varphi)$,

$$\mathbf{A} = m\,\ell^2(t)\begin{pmatrix} 1 & 1 + \cos\vartheta \\ 1 + \cos\vartheta & 2 + 2\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = m\,\ell^2(t)\begin{pmatrix} 1 + \cos\vartheta + \cos(\vartheta + \psi) \\ 2 + 2\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta + \psi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = m\,\ell^2(t)\,\Big[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)\Big]$$

$$\mathbf{g} = m\,\ell(t)\,\dot{\ell}(t)\begin{pmatrix} \sin\vartheta + \sin(\vartheta + \psi) \\ \sin\psi + \sin(\vartheta + \psi) \end{pmatrix}$$

and $\mathbf{f} = 0$.

The quadratic term R_2 of the Routh function is given by

$$R_2 = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^{T}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{T}\right)\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\,(\dot{\vartheta}\,,\dot{\psi})\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

where

$$\alpha_{11} = m\,\ell^2(t)\left[1 - \frac{[1 + \cos\vartheta + \cos(\vartheta + \psi)]^2}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)}\right]$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = m\,\ell^2(t)\,\Big[1 + \cos\vartheta -$$

$$\left. - \frac{[1 + \cos\vartheta + \cos(\vartheta + \psi)]\,[2 + 2\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta + \psi)]}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)}\right]$$

$$\alpha_{22} = m\,\ell^2(t)\left[2 + 2\cos\vartheta - \frac{[2 + 2\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta + \psi)]^2}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)}\right].$$

and the terms R_0 and R_1 have the following expression

$$R_0 = m\dot{\ell}^2(t)\,[\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta+\psi)] -$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{m\,\ell^2(t)\,[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)]}$$

$$\begin{aligned} R_1 = & \left[\frac{1+\cos\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)}\,c - \right. \\ & \left. - m\,\ell(t)\,\dot{\ell}(t)\,(\sin\vartheta + \sin(\vartheta+\psi)\right]\,\dot{\vartheta} \\ & + \left[\frac{2+2\cos\vartheta+\cos\psi+\cos(\vartheta+\psi)}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)}\,c - \right. \\ & \left. - m\,\ell(t)\,\dot{\ell}(t)\,(\sin\psi + \sin(\vartheta+\psi)\right]\,\dot{\psi} \end{aligned}$$

We then recognize that condition (3.2) is satisfied by choosing

$$v(t,\vartheta,\psi) = m\,\ell(t)\,\dot{\ell}(t)\,[\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta+\psi)]$$

and

$$\mathbf{h}_*(\vartheta,\psi,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)}\,c \\[2ex] \dfrac{2+2\cos\vartheta+\cos\psi+\cos(\vartheta+\psi)}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)}\,c \end{pmatrix}$$

Consequently, it is possible to construct the "new" Routh function $\tilde{R}$ given by (3.3), whose linear term in the velocities $\tilde{R}_1 = \mathbf{h}_*\,\dot{\mathbf{q}}$ is time-independent, and whose therm $\tilde{R}_0 = R_0 - \partial v/\partial t$ is given by

$$\tilde{R}_0 = -\,m\,\ell(t)\,\ddot{\ell}(t)\,[\cos\vartheta + \cos\psi + \cos(\vartheta+\psi)] -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{m\,\ell^2(t)\,[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)]}$$

It is easy to verify that the Routh equations possess the ∞^1 solutions

$$\vartheta(t) \equiv 0\,, \qquad \psi(t) \equiv 0 \qquad \forall\, c \in \Re \tag{8.2}$$

to which correspond the following generalized steady motions

$$\vartheta(t) \equiv 0 , \quad \psi(t) \equiv 0 \quad \dot{\varphi}(t) \equiv \frac{c}{9\, m\, \ell^2(t)} , \quad \forall\, c \in \Re \tag{8.3}$$

Fix a value $c = \bar{c}$, and put $b = c - \bar{c}$. The function W defined by (5.1) has the following expression

$$W(t, \vartheta, \psi, b) = \frac{(\bar{c} + b)^2}{9\, m\, \ell^2(t)} \, \frac{3 - \cos\vartheta - \cos\psi - \cos(\vartheta + \psi)}{3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta + \psi)}$$

$$- \, m\, \ell(t)\, \ddot{\ell}(t)\, [3 - \cos\vartheta - \cos\psi - \cos(\vartheta + \psi)]$$

The results obtained by applying Theorem 6.1

Conditions (i) of Theorem 6.1 is satisfied. Moreover it results on $S_{\mathbf{q}}$, i.e. in a neighbourhood of $\vartheta = 0 , \psi = 0$,

$$W(t, \vartheta, \psi, b) = \left[\frac{(\bar{c} + b)^2}{81\, m\, \ell^2(t)} - m\, \ell(t)\, \ddot{\ell}(t)\right] \left(\vartheta^2 + \psi^2 + \vartheta\, \psi\right) + [> 2]$$

where $[> 2]$ denotes the terms of order greater than 2 in ϑ and ψ.

Fix $\bar{c} \neq 0$. By virtue of condition **c)**, for every real constant k_1 such that

$$0 < k_1 < \frac{\bar{c}^2}{81\, m\, \ell_2^2} \tag{8.4}$$

a constant T appropriately large, and a constant $\rho > 0$ appropriately small exist such that we have

$$W(t, \vartheta, \psi, b) \geq k_1 \left(\vartheta^2 + \psi^2 + \vartheta\, \psi\right) , \ \forall t \geq T, \ \forall (\vartheta, \psi) \in S_{\mathbf{q}}, \ \forall\, b \in S_{\mathbf{b}} \tag{8.5}$$

and thus also condition (ii) of Theorem 6.1 is satisfied, for every $\bar{c} \neq 0$.

The partial derivative respect to time of the function W is given by

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \dot{\ell}(t) \left\{ \left[\frac{2(\bar{c} + b)^2}{81 m \ell^3(t)} + m\ddot{\ell}(t) + m\ell(t) \frac{\dddot{\ell}\,(t)}{\dot{\ell}(t)} \right] \left(\vartheta^2 + \psi^2 + \vartheta\psi\right) + [> 2] \right\}$$

and thus, taking into account conditions **b), c), d)**, for every constant k_2 such that

$$k_2 > \frac{2\, \bar{c}^2}{81\, m\, \ell_1^3} + \gamma\, m\, \ell_2 \tag{8.6}$$

a constant T appropriately large, and a constant $\rho > 0$ appropriately small exist such that

$$\frac{\partial W}{\partial t} \leq -\dot{\ell}(t)\, k_2 \left(\vartheta^2 + \psi^2 + \vartheta\,\psi\right), \ \forall t \geq T,\ \forall(\vartheta,\psi) \in S_{\mathbf{q}},\ \forall b \in S_b \tag{8.7}$$

Put

$$k = \frac{k_2}{k_1} = \frac{2}{\ell_1} + \gamma\, \frac{81\, m^2\, \ell_2^3}{\bar{c}^2} \tag{8.8}$$

Comparing inequalities (8.5) and (8.7), we recognize that

$$\frac{\partial W}{\partial t} \leq -k\,\dot{\ell}(t)\, W\,, \qquad \forall t \geq T\,,\ \forall(\vartheta,\psi) \in S_{\mathbf{q}}\,,\ \ \forall b \in S_b$$

and so condition (6.1) is satisfied by choosing

$$p(t) = p_* \exp\left\{k\,\ell(T) - k\,\ell(t)\right\}, \qquad \forall t \geq T$$

where p_* is an arbitrary strictly positive real constant.

In regard to condition (6.2), it is enough to notice that

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} = \frac{2\,\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}\, R_2$$

from which follows that condition (6.2) is verified if the power of the dissipative forces satisfies the following inequality

$$\mathbf{Q}^T\,\dot{\mathbf{q}} \leq \left(\frac{2}{\ell(t)} - k\right) \dot{\ell}(t)\ R_2 \qquad \forall\,(t,\vartheta,\psi,\dot{\vartheta},\dot{\psi},b) \in [T,\infty)\times S_{\mathbf{q}}\times S_{\dot{\mathbf{q}}}\times S_b$$

The results obtained by applying Theorem 7.1

The partial derivative , respect to the positional coordinates, of the function W are

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \left\{\frac{(\bar{c}+b)^2}{m\,\ell^2(t)}\,\frac{1}{\left[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)\right]^2} - \right. \\ \left. - m\,\ell(t)\,\ddot{\ell}(t)\right\}\left[\sin\vartheta + \sin(\vartheta+\psi)\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = \left\{\frac{(\bar{c}+b)^2}{m\,\ell^2(t)}\,\frac{1}{\left[3 + 2\cos\vartheta + 2\cos\psi + 2\cos(\vartheta+\psi)\right]^2} - \right.$$

$$- m\,\ell(t)\,\ddot{\ell}(t)\Big\}\;\Big[\sin\psi\;+\;\sin(\vartheta\;+\;\psi)\Big]$$

Consequently, putting

$$P(t,\mathbf{q},b)\;=\;P(t,\vartheta,\psi,b)\;=$$

$$=\;\frac{(\bar{c}\;+\;b)^2}{m\,\ell^2(t)}\,\frac{1}{\big[3\;+\;2\,\cos\vartheta\;+\;2\,\cos\psi\;+\;2\,\cos(\vartheta\;+\;\psi)\big]^2}\;-\;m\,\ell(t)\,\ddot{\ell}(t) \tag{8.9}$$

and

$$W_0(\mathbf{q})\;=\;W_0(\vartheta,\psi)\;=\;3\;-\;\cos\vartheta\;-\;\cos\psi\;-\;\cos(\vartheta\;+\;\psi) \tag{8.10}$$

we recognize that the following identity holds

$$\frac{\partial\,W}{\partial\,\mathbf{q}}\;=\;P(t,\mathbf{q},b)\,\frac{\partial\,W_0}{\partial\,\mathbf{q}}$$

and then condition (7.1) is satisfied.

Moreover, the function $W_0(\vartheta,\psi,0)$ is definite positive respect to ϑ and ψ , and thus also the condition (ii) of Theorem 7.1 is satisfied.

Finally, we verify that the condition (iii) of Theorem 7.1 is satisfied when there exists a real constant $\varepsilon > 0$ such that

$$\mathbf{Q}^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \le q\left[(2\ell(t)-k)\,\dot{\ell}(t)-\varepsilon\right]R_2,\ \forall(t,\vartheta,\psi,\dot{\vartheta},\dot{\psi},b)\in[T,\infty)\times S_{\mathbf{q}}\times S_{\dot{\mathbf{q}}}\times S_b$$

where k is defined by (8.8).

REFERENCES

[1] C. R i s i t o , *The Comparison Method applied to the Stability of Systems with known First Integrals* , Proc. 6^{th} Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Poznan, 1972, Nonlinear Vibration Problems, **15**, 25-45 (1974).

[2] C. R i s i t o , *Metodi per lo studio della stabilitá di sistemi con integrali primi noti* , Ann. Mat. Pura Appl. **107** (1975), 49-94.

[3] G. C a n t a r e l l i , *Metodo per lo studio della stabilitá dei moti merostatici generalizzati* , Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 391-401.

[**4**] G. Cantarelli, *Sulla stabilitá dei moti merostatici generalizzati dei sistemi olonomi reonomi con coordinate ignorabili* , Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 263-274.

УДК 531.31

ON THE RELATIVE TOTAL FUNCTIONAL STABILITY WITH TWO METRICS

Giuseppe ZAPPALÁ

Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Universita' di Catania,
Viale A. Doria 6, 95125 CATANIA ITALIA.
mail: *zappala@dmi.unict.it*

Introduction

The concept of relative stability (Lakshmikantham [7]) is concerned with two differential systems

$$(\text{A})\ \dot{x} = f(t,x),\ \ x(t') = x'; \quad (\text{B})\ \dot{y} = g(t,y),\ \ y(t') = y'$$

where $f,\ g \in C[R \times R^n, R^n]$; $x(t) = x(t,t',x')$ and $y(t) = y(t,t',y')$ are two solutions of (A), (B) respectively.
It is well known the following

Definition: The two differential systems (A, B) are said to be *relatively equistable* if, for each $\epsilon > 0$ and $t' \in R^+$, there exists a $\delta = \delta(t',\epsilon) > 0$ such that the inequality $\|x'-y'\| < \delta$ implies that $\|x(t)-y(t)\| < \epsilon$, $\forall t \geq t_0$.

We introduce here a new type of stability where variations of second member of the equations (A), (B) are also taken into account [1],[12].
Hence we consider the two differential systems

$$(\text{A'})\ \dot{x} = f(t,x) + F(t,x); \qquad (\text{B'})\ \dot{y} = g(t,y) + G(t,y)$$

where $F, G \in C[R \times R^n, R^n]$ will play the role of perturbation terms during the motion.
In the present work we mix the previous relative stability with the total stability (Malkin [11] and Gorsin [3]) and the stability in term of two measures (Movchan [14]).
The fundamental aspect of its proof togheter with ideas of Liabunov's [10] direct methods are extended to some Malkin's [11], Oziraner's [16], Savtchenko's [22] theorems.

For this purpose we use the technique of parameter function family (Matrosov [13], Rouche[17], Salvadori [21]) coupled with the topological limit theory (Cartan- Silov [23]).
The purpose is that of renuncing, when possible in the theoretical developments, the use of the definite and semidefinite functions.

1. Preliminaries.

Denote $N^+ = (1, 2, ...)$; $R =]-\infty, +\infty[$; $I = R^+ = [0, +\infty[$; $I' =]0, +\infty[$; $|\cdot|$ =norm in R; $R' = R^n$; $\|\cdot\|$ =norm in R'; $R'' = R' \times R'$; ∂A = the boundary, A' =closure of set A; C =continuous functions set; C' =continuous functions set with continuous derivatives; $die[A, B]$ =euclidean distance of sets A, B. If $S(t', x', y') = 0$ then (t', x', y') is a singular point of S.

Let us begin by defining the following classes of non trivial functions, the classes of sets and also the topological limit concept for future use.
$K = \{a(u) \in C(I, I)$ strictly increasing: $a(0) = 0\}$;
$H = \{h(t, x, y) \in C(R \times R'', I)$ so that $\inf h = 0\ \forall t \in R\}$;
$Q(s) = \{(t, x, y) \in R \times R'' : h(t, x, y) \leq s$ given $h \in H, \quad s > 0\}$;
$Q'(t, s) = \{(x, y) \in R" : h(t, x, y) \leq s$ for fixed $t \in I, s > 0\}$.

Since $0 < s < s' \Rightarrow Q(s) \leq Q(s')$ the set of sets $\{Q(s)\}$ represents a Cartan-Silov direction [23].

We say that $\lim h = 0$ implies $\lim V = 0$ if and only if for every Silov direction such that $\lim h = 0$ we have $\lim V = 0$ (in short $h \to 0 \Rightarrow V \to 0$).
$BK = \{b = b[t, h(t, x, y)] \in C(R \times I, I) : \lim h = 0 \Rightarrow \lim b = 0\}$;
$BL = \{V = V(t, x, y) \in C(R \times R'', R)\}$;
$BL' = \{V = V(t, x, y) \in C'(R \times R'', R)\}$;
$BL'' = \{g = g(t, x, y) : I \times R'' \to I\}$;
$CL = \{S = S(t, x, y) : R \times R'' \to I$ with number of singular points $\leq 1\}$.

Assumption 1.1. Given $h', h \in H$ assume that: i) $\exists \lambda > 0,\ m \in K$ so that (s.t.) $h'(t, x, y) < \lambda \Rightarrow h(t, x, y) \leq m[h'(t, x, y)] < m(\lambda)$ (we say that h' is uniformly finer than h [9]); 2i) in the sequel $\forall \epsilon > 0$ will be equivalent to $\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \sup\ h(t, x, y)$.

Assumption 2.1. Suppose that given $(t', z') \in R \times R'$ there exist two solutions $x = x(t) = x(t, t'z')$, $y = y(t) = y(t, t', z')$ of (A') and (B') respectively that are defined for $t \geq t'$.

What is known as Liapunov's [10] direct method, for the study of stability, makes an essential use of auxiliariy functions, also called Liapunov-like functions. Let $V(t,x,y) \in BL'$; denote

$$\dot{V}(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \tag{1.1}$$

the derivative of V respect to the systems (A,B) and(Malkin's formula)

$$\dot{V}'(t,x,y) = \dot{V}' = \dot{V} + \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \tag{2.1}$$

the derivative of V along the solutions of the perturbed equations (A',B').

Definition 1.1. The systems (A.B) are said to be *relatively* (h',h)-*totally functionally stable* (RT) if $[\forall\epsilon > 0][\forall t' \in I][\exists\delta > 0][\exists S \in CL][\forall x', y' \in R' : h'(t', x', y') < \delta][\forall F, G \in BL'' : \|F\| + \|G\| \leq S$ on $Q(\epsilon)]$ we obtain $h[t, x(t), y(t)] < \epsilon$, $\forall t \geq t'$.

Definition 2.1. The systems (A,B) are said to be RT *on average* if $[\forall\epsilon > 0][\forall t' \in I][\forall T > 0][\exists\delta > 0][\exists\Psi = \Psi(t) > 0]$ $[\forall\ x', y' \in R'$:

$$h'(t',x',y') < \delta]\ [\forall\ F, G \in BL'' : \int_t^{t+T} \{\sup[\|F\| + \|G\|] \text{ on } Q(\epsilon)\} d\tau < \Psi(T)]$$

we have $h[t, x(t), y(t)] < \epsilon\ \forall t \geq t'$.

Definition 3.1. The systems (A,B) are said to be *eventually relatively* (h',h)-*totally functionally stable* or *eventually* RT if $[\forall\epsilon > 0][\exists S = S(t,x,y) \in CL][\exists T > 0]$ $[\forall\ F, G \in BL" : \|F\| + \|G\|) \leq S$ on $Q(\epsilon)]$ $[\forall\ t' > T]$, $[\exists\delta > 0][\forall\ x', y' \in R' : h'(t', x', y') < \delta]$ we have $h[t, x(t), y(t)] < \epsilon$, $\forall\, t \geq t'$.

Let $q = \sup h$; $Q = \{(t,x,y) : h(t,x,y) \leq q\}$, $0 < g = g(t,x,y) \in BL''$; $\varphi = \varphi(t,x,y)$; $T = T(t,x,y)$, $V = V(t,x,y)$, $W = W(t,x,y) \in BL'$, $Z = Z(t,x,y) : I \times R'' \to R^k$ ($k > 0$ integer) be a vector function; let $c > 0$ denote $E(\varphi \leq c) = \{(t,x,y) \in I \times R'' : \varphi(t,x,y) \leq c\}$, for every $t \in R$ denote $E_t(\varphi \leq c) = \{(x,y) \in R" : \varphi(t,x,y) \leq c\}$.

Assumption 3.1. We will suppose that $\varphi \geq 0$, and also $\forall\xi > 0\ \exists\xi' > 0$ so that $\varphi \leq \xi \Rightarrow |\text{grad}\varphi| \leq \xi'$.

Definition 4.1. The function W is said to be *h-positive* (*h-negative*) in the set $E_t(V = 0)$ if $\forall\ \epsilon : 0 < \epsilon < q$ there exists two numbers $C, B > 0$ so that $h(t,x,y) = \epsilon$ and $|V(t,x,y)| < C \to W(t,x,y) > B$ $(W < B)$.

Definition 5.1. The function $T \in BL'$, is said to be *help function* on the set $E(\varphi = 0)$ if a constant c $(0 < c <\sup\varphi)$ and two functions $S = S(t,x,y) \in CL$, $g \in BL''$ $(S \geq 0, g > 0)$ exist so that: put

$$A_1 = \{(t,x,y) : \varphi(t,x,y) \leq c \rightarrow \quad \dot{T} \leq -Sg, \quad T \geq 0\},$$

$$A_2 = \{(t,x,y) : \varphi(t,x,y) \leq c \rightarrow \quad \dot{T} \geq Sg, \quad T \leq 0\}$$

we have $A_1 \cup A_2 = \{(t,x,y) : \varphi(t,x,y) \leq c\}$.

Definition 6.1. We say that Z is said to be *vector help function* on the set $E \subset R \times R''$ if two functions $S = S(t,x,y) \in CL$ and $g = g(t,x,y) \in BL''$ $(S \geq 0,\ g > 0)$, a constant $C > 0$ and two open coverings

$$\{O_i, O_{i+k}; \quad i = 1,2,...,k\}, \qquad \{O'_i, O'_{i+k}; \quad i = 1,2,...,k\}$$

of E exist s.t. the following properties are fulfilled

$$\text{(6.1a)} \quad O_j \subset O'_j, \quad die[\partial O_j, \partial O'_j] \geq 3C, \quad j = 1,2,...,2k;$$

$$\text{(6.1b)} \quad (t,x,y) \in O'_i \Rightarrow \dot{Z}(t,x,y) \leq -Sg(t,x,y) \leq 0, \quad Z_i \geq 0;$$

$$\text{(6.1c)} \quad (t,x,y) \in O'_{i+k} \Rightarrow \dot{Z}(t,x,y) \geq Sg(t,x,y) \geq 0, \quad Z_i \leq 0.$$

2. Theoretical Developments.

Theorem 1.2. Suppose that for every $\epsilon > 0$ there exist three functions $V = V(t,x,y) \in BL'$, $S = S(t,x,y)$, $M = M(t,x,y) \in BL''$ and a constant l with the following properties

$$\text{(1.2a)} \quad h(t,x,y) = \epsilon \Rightarrow V(t,x,y) > l > 0;$$

$$\text{(1.2b)} \quad \lim h(t,x,y) = 0 \Rightarrow \lim V(t,x,y) = 0;$$

$$\text{(1.2c)} \quad \dot{V}(t,x,y) \leq -S(t,x,y), \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\| \leq M, \quad (S/M \in CL).$$

Then the systems (A,B) are RT.

Proof. Given $\epsilon > 0$, $t' \in I$, $V(t,x,y) \in BL'$, $l > 0$; by (1.2a) there exist a $\delta' \in]0,\epsilon[$ s.t. $h(t',x,y) < \delta'$ implies $V(t',x,y) < l$; select $x', y' \in R'$ s.t. $h'(t',x',y') < \delta = \min[\lambda, m^{-1}(\delta')] = MIN$ then $h(t',x',y') < \delta'$ and $V(t',x',y') < l$. From (2.1) we have

$$\dot{V}' = \dot{V} + \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq -S + M(\|F\| + \|G\|) \leq 0 \tag{1.2}$$

let F, G s.t. $\|F\| + \|G\| \leq \frac{S}{M} \in CL$ on the set $Q(\epsilon)$ then $\dot{V} \leq 0$. Consider two solutions $x(t) = x(t, t', x')$, $y(t) = y(t, t', y')$ of (A',B') and the composite functions $v(t) = V[t, x(t), y(t)]$, $h'(t) = h'[t, x(t), y(t)]$. If suppose that $\exists t'' > t'$ for which $h'(t'') = \epsilon$ we obtain $v(t'') > l$; it is a contradiction.

Theorem 2.2. Suppose that four functions $V = V(t, x, y) \in BL'$, $M = M(t, x, y)$, $S = S(t, x, y) \in BL$", $a = a(u) \in K$ exist so that

$$\text{(2.2a)} \quad a[h(t, x, y)] \leq V(t, x, y), \quad \lim h = 0 \Rightarrow \lim V = 0;$$

$$\text{(2.2b)} \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\| \leq M, \quad \dot{V}(t, x, y) \leq -S(t, x, y) \leq 0, \; S/M \in CL.$$

Then the systems (A,B) are RT.

Theorem 3.2. Suppose that there exist four functions $V = V(t, x, y)$, $W = W(t, x, y) \in BL'$, $S = S(t, x, y)$, $M = M(t, x, y) \in BL''$, a constant $D > 0$ so that

$$\text{(3.2a)} \quad V \geq 0, W \geq -D; \dot{V} \leq -S \text{ and } \dot{W} \leq 0 \text{ or } \dot{V} \leq 0 \text{ and } \dot{W} \leq -S;$$

$$\text{(3.2b)} \quad \lim h = 0 \Rightarrow \lim V = \lim W = 0;$$

$$\text{(3.2c)} \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial y}\right\| < M \quad (S/M) \in CL;$$

$$\text{(3.2d)} \quad W \text{ is definite positive on the sets } E_t(V = 0).$$

Then the systems (A,B) are RT.

Proof. Given $\epsilon > 0$ and $t' \in I$, let $0 < \mu < \frac{C}{D + B}$ (Def. 4.1) and consider the functions family

$$v(t, x, y) = V(t, x, y) + \mu W(t, x, y). \tag{2.2}$$

If we suppose $h(t, x, y) = \epsilon$, $V(t, x, y) \geq C$ we obtain $v(t, x, y) \geq C - \mu D$ and $v(t, x, y) - \mu B \geq C - \mu(D + B) > 0$, i.e. $v(t, x, y) > \mu B$. If $h(t, x, y) = \epsilon$, $V(t, x, y) < C$ also by Def.4. 1 $v(t, x, y) > \mu B$, put $l = \mu B$ deduce $h(t, x, y) = \epsilon \Rightarrow v(t, x, y) > l$.

Theorem 4.2. Suppose that for every $\epsilon > 0$ a function $V = V(t, x, y) \in BL$, a constant $l > 0$ exists s.t.

$$\text{(4.2a)} \quad h(t, x, y) = \epsilon \Rightarrow V(t, x, y) > l, h(t, x, y) \to 0 \Rightarrow V(t, x, y) \to 0;$$

(4.2b) $\forall \sigma > 0 \quad \exists S = S(t,x,y) \in CL, \quad \exists W = W(t,x,y) \in BL'$s.t.

if $\|F\| + \|G\| \leq S$ the following conditions hold $[\text{on} Q(\epsilon)]$

$$|V(t,x,y) - W(t,x,y)| < \sigma, \quad \dot{W}'(t,x,y) \leq 0.$$

Then the systems (A.B) are RT.

Proof. Given $\epsilon > 0$, l and V, given $t' \in I$ we find $\delta' \in]0,\epsilon[$ so that $h(t',x,y) < \delta' \Rightarrow V(t',x',y') < l$. Put $\delta = MIN$, suppose $h'(t',x',y') < \delta$ we have $V(t',x',y') = l' < l$. Consider two solutions $x(t) = x(t,t',x')$; $y(t) = y(t,t',y')$ of (A',B'), suppose $h[t,x(t),y(t)] < \epsilon \ \forall t \in [t',t''[$ and $h[t'',x(t''),y(t'')] = \epsilon$ we obtain $V(t'',x(t''),y(t'')) = l'' > l$.

Let's assume $\sigma = \dfrac{l''-l'}{2}$, $\|F\| + \|G\| < S$ on $Q(\epsilon)$ we have:

$$|V(t',x',y') - W(t',x',y')| < \sigma \tag{3.2}$$

i.e. $V - \sigma < W < V + \sigma, \quad W(t',x',y') < \dfrac{l'+l''}{2}$ then

$$|V[t'',x(t''),y(t'')] - W[t'',x(t''),y(t'')]| < \sigma \tag{4.2}$$

i.e. $W[t'',x(t''),y(t'')] > \dfrac{l'+l''}{2}$; it is a contradiction.

Theorem 5.2. Suppose that given $\epsilon > 0$ there exist four functions $M = M(t,x,y) \in BL''$, $U = U(t,x,y)$, $V = V(t,x,y) \in BL'$, $z = z(t) \in C(I,I)$, a constant $l > 0$ so that

(5.2a) $h(t,x,y) = \epsilon \Rightarrow V(t,x,y) > l; \lim h = 0 \Rightarrow \lim V = 0, t \to +\infty;$

(5.2b) $\dot{V}(t,x,y) \leq -U(t,x,y) + z(t),\ 0 < \displaystyle\int_0^\infty z(\tau)d\tau < +\infty;$

(5.2c) $\left\|\dfrac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\dfrac{\partial V}{\partial Y}\right\| < M \qquad (M > 0),\ U/M \in CL.$

Then the systems (A,B) are eventually RT.

Proof. Given $\epsilon > 0$ with U, z; put

$$W(t,x,y) = V(t,x,y) + \int_t^{+\infty} z(u)du \qquad (t > 0) \tag{5.2}$$

from (5.2) and (2.1) deduce

$$\dot{W}(t,x,y) \leq -U(t,x,y) < 0, \dot{W}' \leq -U + M(\|F\| + \|G\|). \qquad (6.2)$$

If $\|F\| + \|G\| \leq \dfrac{U}{M}$ we have $\dot{W}' \leq 0$. Let $T > 0$ s.t. $2 \int\limits_{t'}^{+\infty} z(\tau)d\tau < l$ when $t' > T$; let $\delta' \in]0, \epsilon[$ s.t. $h(t',x,y) < \delta' \Rightarrow 2V(t',x,y) < l$. If $h'(t',x',y') < \delta = MIN$ obtain $h(t',x',y') < \delta'$, $2V(t',x',y') < l$, $W(t',x',y') < l(t' > T)$. Consider the solutions $x(t) = x(t,t',x')$, $y(t) = y(t,t',y')$, of (A',B') denote $h(t) = h[t,x(t),y(t)]$, $\quad v(t) = V[t,x(t),y(t)]$, and $w(t) = W[t,x(t),y(t)]$. Let's $t'' > t'$ s.t. $h(t'') = \epsilon$ we have $v(t'') > l$, $w(t'') > l$; it is a contradiction.

Theorem 6.2. Suppose that four functions $S' = S'(t,x,y) \in BL"$, $\varphi = \varphi(t,x,y)$, $T = T(t,x,y) \in BL'$, $g' = g'(t,x,y) \in BL''$, a constant λ with the following hypotheses exist:

$$\text{(6.2a)} \quad \text{for } \varphi \text{ the assumption 1.10 holds}, h \to 0 \Rightarrow T \to 0;$$

$$\text{(6.2b)} \quad |T|,\ \|TF\|,\ \|TG\|, \leq S'g' \quad (g' > 0, S' \geq 0);$$

$$\text{(6.2c)} \quad T \text{is an help function on the set} E(\varphi = 0);$$

$$\text{(6.2d)} \quad g' = g, S' = \lambda S \text{according to def. 5.1.}$$

Then, for every $\tau > 0$ two constants C, $N > 0$, five sets $P_(\tau)$, $D_{i\tau}$, $D''_{i\tau}$ $(i = 1,2)$ and a function $J = J(t,x,y) \in BL'$, exist so that put, $\cup_i = \cup_{(i=1,2)}$, we have

$$\text{(6.2a')} \ \cup_i D_{i\tau} \supseteq \cup_i D''_{i\tau} \supset E(\varphi = 0) \cap P_(\tau), suppJ \subseteq \cup_i D_{i\tau};$$

$$\text{(6.2b')} \quad J \geq 0, \dot{J} \leq 3\lambda NSg \text{for}(t,x,y) \in P_(\tau) \text{and} \dot{J} \leq -Sg$$
$$\text{when}(t,x,y) \in D"_{i\tau} \cap P_(\tau);$$

$$\text{(6.2c')} \ h(t,x,y) \to 0 \Rightarrow J(t,x,y) \to 0.$$

Proof. Let A_1, $A_2 \subset R \times R''$ the sets of def. 5.1, denote by n_i (≥ 3) the first integer s.t. the following set is not empty

$$B_i = \left\{(t,x,y) \in A_i : \frac{n_i - 3}{n_i} c \leq \varphi(t,x,y) \leq \frac{n_i - 2}{n_i} c\right\}. \qquad (7.2)$$

Denote: $\min die[\partial A_i, \partial B_i] = 3C > 0$ $(i = 1,2)$; $P_(\tau) = \{(t,x,y) \in R \times R'' : t^2 + x^2 + y^2 \leq \tau$ with $(\tau > 0)\}$, $B'_{i\tau} = B_i \cap P_(\tau)$, $D_{i\tau} = \{(t,x,y) :$

$die[(t,x,y),B'_{i\tau}] \le 3C\}$, $D'_{i\tau} = \{(t,x,y) : die[(t,x,y),B'_{i\tau}] \le 2C\}$, $D''_{i\tau} = \{(t,x,y) : die[(t,x,y),B'_{i\tau}] \le C\}$, $E_\tau = E(\varphi = 0) \cap P_(\tau)$.
Consider the step function $\Psi_i(t,x,y) = 1$ on $D'_{i\tau}$, $\Psi_i(t,x,y) = 0$ for $(t,x,y) \notin D'_{i\tau}$ and the average function (if $A_i = \emptyset$ then $\alpha_1 = 0$):

$$\alpha_i = \alpha_i(t,x,y) = \int\limits_{R\times R''} \Psi_i(t,x,y)\phi_r(z-u)du \quad (r = C) \tag{8.2}$$

when $u, z \in R \times R''$. Obtain the following properties $\alpha_i(t,y) \in C^\infty$,
$0 \le \alpha_i(t,y) \le 1$; $\left|\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right|, \left\|\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial \alpha_i}{\partial y}\right\| < N$ (> 0 const), $\alpha_i = 1$ when $(t,x,y) \in D''_{i\tau}$, $\alpha_i = 0$ if $(t,x,y) \notin D_{i\tau}$.
We put, on $R \times R''$:

$$J(t,x,y) = \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1}\alpha_i(t,x,y)T(t,x,y). \tag{9.2}$$

and after consider only $(t,x,y) \in P_(\tau)$.
Therefore we have: $J \ge 0$, $J = 0$ for $(t,x,y) \notin D_{i\tau}$ and, for $(t,x,y) \in D_{i\tau}$:

$$\dot J(t,x,y) = \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1}[\dot\alpha_i T + \alpha_i \dot T] \le 3\lambda NSg. \tag{10.2}$$

Obviously when $(t,x,y) \in D"_{i\tau} \cap P(\tau) \Rightarrow \dot J \le -Sg$.

Theorem 7.2. Suppose that seven functions g, M, $S \in BL''$, $(S \le M)$, $T, \varphi, V, W \in BL'$, a constant $D > 0$ exist so that

(7.2a) $V \ge 0, W \ge -D, \dot V, \dot W \le 0, h \to 0 \Rightarrow T, V, W \to 0$;

(7.2b) theorem 6.2 holds, W is h- positive on the sets $E_t(V = 0)$; $h \to 0 \Rightarrow V, W, T \to 0$

(7.2c) $\forall \nu > 0 \quad \exists \nu' > 0$ s.t. $\varphi \ge \nu \Rightarrow \dot V \le -\nu' Sg \le 0, \ (g > 0)$

(7.2d) $\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial T}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial y}\right\| < Mg, \ S/M \in CL$;

(7.2e) T is an help function on the set $E(\varphi = 0)$.

Then the systems (A,B) are RT.

Proof. Let $\tau > 0$ previously fixed, introduce for every $\epsilon > 0$ the two parameter functions family

$$v(t,x,y) = V(t,x,y) + rW(t,x,y) + r'J(t,x,y) \tag{11.2}$$

where $0 < r < \dfrac{C}{D+B}$ (see Theorem 3.2) and $r' > 0$; we deduce

$$(7.2a') \quad h = \epsilon \Rightarrow v > l; \quad \lim h = 0 \Rightarrow \lim v = 0.$$

Consider the derivative

$$\dot{v} = \dot{v}(t,x,y) = \dot{V}(t,x,y) + r\dot{W}(t,x,y) + r'\dot{J}(t,x,y). \tag{11.2}$$

If we suppose $(t,x,y) \in P(\tau)$, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ and $die[(t,x,y), B'_{1\tau}] \leq C$ we have $\dot{J} \leq -Sg$, $\dot{v} \leq -r'Sg$; if $die[(t,x,y), B_{1\tau}] > C \Rightarrow 4\varphi \geq C'$ (suitable constant > 0) in this case we obtain for 7.2c)

$$\dot{v} = \dot{V} + r\dot{W} + r'\dot{J} \leq (-\nu' + 3r'\lambda N)Sg. \tag{13.2}$$

Then, if we select the constant r' s.t. $(3\lambda N + 1)r' \leq \nu'$ we obtain $\dot{v} \leq -r'Sg$ since τ is arbitrary we conclude the proof (the procedure whit an one parameter function family $v = V + r'J$ is obvious).

Theorem 8.2. Suppose that a constant λ three functions $g = g(t,x,y)$, $S = S(t,x,y) \in BL"$, $Z = Z(t,x,y) : R \times R'' \to R^k$ $(k \in N^+)$ with $Z_i \in BL'$ $(i = 1,2,..,k)$; a set $E \subset I \times R''$ exist so that (according to def. 6.1):

(8.2a) Z is an help function on the set $E, h \to 0 \Rightarrow Z \to 0$;

(8.2b) $|Z_i|, \|FZ_i\|, \|GZ_i\|, \leq \lambda Sg, \quad (g > 0, S \geq 0)$.

Then, for every $\tau > 0$ a function $J = J(t,x,y) \in BL'$, a constant $N > 0$, two open coverings $\{Q_j\}, \{Q_j"\}$ of the set $E \cap P_(\tau)$ with the following properties exist:

(8.2a')$Q_j \subseteq Q''_j$, supp $J \subseteq U_j Q''_j, J \geq 0; \quad j = 1,2,...,2k$;

(8.2b') $\dot{J} \leq -Sg$ when $(t,x,y) \in Q_j$, $\quad \dot{J} \leq 3k\lambda NSg$ somewhere;

(2.8c') $h(t,x,y) \to 0 \Rightarrow J(t,x,y) \to 0$.

Proof. Given $\tau > 0$; consider the sets $D_j = P_(\tau) \cap O_j$, (see def.6.1, where $P_(\tau)$ is defined in theorem 6.2) ; $Q_j = \{(t,x,y) : die[(t,x,y), D_j] \leq C\}$; $Q'_j = \{(t,x,y) : die[(t,x,y), D_j] \leq 2C\}$, $Q_j - \{(t,x,y) : d[(t,x,y), D_j] \leq 3C\}$ and the step functions $\Psi_j = \Psi_j(t,x,y) = 1$ for $(t,x,y) \in Q'_j$ and

$\Psi_j = 0$ for $(t,x,y) \notin Q'_j$.
Let us take the average functions $(Q'_j = \emptyset \Rightarrow \alpha_j = 0)$

$$\alpha_j = \alpha_j(z) = \int\limits_{R\times R''} \Psi_j(u) S_r(z-u)du \quad (r = C) \qquad (14.2)$$

where $u, z, \in R \times R''$. We have $0 \le \alpha_j \le 1$, $\alpha_j = 0$ for $(t,x,y) \notin Q_j$", $\alpha_j = 1$ for $(t,x,y) \in Q_j$; $\left|\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right|, \left\|\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial \alpha_i}{\partial y}\right\| < N$, ($N$ suitable constant > 0).
Put on $R \times R''$

$$J(t,x,y) = \sum_{j=1}^{k} [\alpha_i(t,x,y) - \alpha_{i+k}(t,x,y)] Z_i(t,x,y) \qquad (15.2)$$

we obtain

$$\dot J = \sum_{j=1}^{k} [\dot\alpha_j - \dot\alpha_{j+k}] Z_j + \sum_{j=1}^{k} [\alpha_j - \alpha_{j+k}] \dot Z_j \le 3\lambda k N S g. \qquad (16.2)$$

Let $(t,x,y) \in Q_j \cap P_(\tau)$ then $\alpha_j = 1$, hence, if $j \in (1,...,k)$ we have $J = Z_j$, $\dot J = \dot Z_j \le -Sg \le 0$ and, for $j \in (k+1,...,2k)$ $\dot J = -\dot Z_j \le -Sg \le 0$.

Theorem 9.2. Suppose that there exist six functions g, M, $S \in BL''$, $Z : R \times R'' \to R^k$ where $Z_j \in BL'$ for $j = 1,...,k$, V, $W \in BL'$, a constant $C > 0$, a set $E \subset I \times R''$ so that

(9.2a) $\quad V \ge 0, \quad W \ge -C; h \to 0 \Rightarrow V, W, Z \to 0;$

(9.2b) $\quad \dot V \le 0,\ , \dot W \le 0, \quad W$ is h-positive on the sets $E_t(V = 0)$;

(9.2c) $\quad \dot V = 0$ in E, $\forall \nu > 0$ there exist $\nu' > 0$ s.t. $d[(t,x,y), E] \ge \nu$
$\Rightarrow \dot V \le -\nu' Sg < 0,\ S/M \in CL;$

(9.2d) $\quad Z$ is an help function on the set E, lemma 8.2 holds;

(9.2e) $\quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial W}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial Z_i}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial Z_i}{\partial y}\right\| < Mg(\ge 0);$

Then the systems (A,B) are RT.

Theorem 10.2. Suppose that for every $\epsilon > 0$ there exist three functions $V = V(t,x,y) \in BL'$, $M = M(t,x,y)$, $S = S(t,x,y) \in BL$", a constant

$l > 0$ so that:
(10.2a) $h(t,x,y) = \epsilon \Rightarrow V(t,x,y) > l$, $\lim h = 0 \Rightarrow \lim V = 0$;
(10.2b) $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\| \le M$; $\dot V \le -S \le 0$, $S/M \in CL$, for $h(t,x,y) \le \epsilon$.
Then the systems (A,B) are RT on average .

Proof. Given $\epsilon > 0$ with l, M, S, V; by (10.2a) fixed $t' \in I$ there $\exists \delta' \in]0,\epsilon[$ s.t. $h(t',x,y) < \delta'$ implies $V(t',x,y) < \dfrac{l}{2}$; select $\delta = MIN$ and consider the solutions $x(t) = x(t,t',x')$, $y(t) = y(t,t',y')$ with $h'(t',x',y') < \delta$. Suppose that $\exists\,\Theta, t'' > t'$, $(\Theta < t'')$ for which $h[t'',x(t''),y(t'')] = \epsilon$, $V[\Theta,x(\Theta),y(\Theta)] = \dfrac{l}{2}$, $\dot V[t,x(t),y(t)] > 0$ for $t \in [\Theta,t'']$. In this case put $W = W(t,x,y) = Ve^{\beta(t)}$, where $\beta(t) \in C'$, we have

$$\frac{\partial W}{\partial x} = e^{\beta(t)}\frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial W}{\partial y} = e^{\beta(t)}\frac{\partial V}{\partial y}; \dot W' = \dot W + e^{\beta(t)}\left[\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G\right] \quad (17.2)$$

Put $\varphi = \varphi(t) = \sup(\|F\| + \|G\|)$ on $Q(\epsilon)$ we obtain

$$\dot W' \le W\left[\frac{\dot V}{V} + \dot\beta + \frac{1}{V}M(\|F\| + \|G\|)\right] \le W\left[-\frac{S}{V} + \dot\beta + \frac{1}{V}M\varphi\right] \quad (18.2)$$

Denote: $v(t) = V[t,x(t),y(t)]$, $s(t) = S[t,x(t),y(t)]$, $m(t) = M[t,x(t),y(t)]$ for $t \in [\Theta,t'']$ and $m' = \max m(t)$, $s'' = \min s(t)$, $v' = \max v(t)$, $v'' = \min v(t)$, obviously $v', v'' > 0$. Then we obtain

$$\dot W \le W\left[\dot\beta - \frac{s''}{v'} + \frac{m'}{v''}\varphi\right]. \quad (19.2)$$

Let $T = t'' - \Theta$ (> 0), $q \in]0,1[$ and select F, G such that:

$$\int\limits_{\Theta}^{\Theta+T} \varphi(u)du \le \frac{v''}{m'}(1-q)\frac{s''}{v'}T. \quad (20.2)$$

Consider a function $\Psi = \Psi(u) \in C(I,I)$ determined by

$$\int\limits_{\Theta}^{\Theta+T} \Psi(u)du = \int\limits_{\Theta}^{\Theta+T}\left[(1-q)\frac{s''}{v'} - \frac{m'}{v''}\varphi(u)\right]du. \quad (21.2)$$

We set for $t \in [\Theta, \Theta + T]$

$$\beta(t) = \int_{\Theta}^{t} \left[-\Psi(u) + (1-q)\frac{s''}{v'} - \frac{m'}{v''}\varphi(u) \right] du \qquad (22.2)$$

hence $\dot\beta(t) = -\Psi + (1-q)\frac{s''}{v'} - \frac{m'}{v''}\varphi$ then $\dot W' \leq W\left[-\Psi - q\frac{s''}{v'}\right] < 0$; it is a contradiction.

3. Examples

Example 1.3. Consider the following differential systems on $R \times R^3$

$$(1.3A) \quad \begin{cases} \dot x = ab(1+z^2)xy^2 - b(1+z^2)y + z - 2x; \\ \dot y = (1+z^2)x - a(1+z^2)x^2y + \frac{1}{b}z; \\ \dot z = -x - y - 2z. \end{cases}$$

$$(1.3B) \quad \begin{cases} \dot u = cd(1+w^2)uv^2 - d(1+w^2)v - u; \\ \dot v = 2(1+w^2)u - 2c(1+w^2)u^2v + \frac{2}{d}w; \\ \dot w = -w - 2v \end{cases}$$

where $a, c > 0$ are constants, $b = b(t)$, $d = d(t) \in C'(R, R)$.

Theorem 1.3. Let $b, d > 0, \dot b, \dot d < 0$, $4h = x^2 + by^2 + z^2 + 2u^2 + dv^2 + w^2 = h'$, then the systems (1.3A,1.3B) are RT.

Proof. Choose $2V = h'$, we obtain $2\dot V = -4x^2 + \dot b y^2 - 4z^2 - 4u^2 + \dot d v^2 - 2w^2 \leq 0$, then $\dot V = 0 \Leftrightarrow x = y = z = u = v = w = 0$ i.e. the proof.

Example 2.3. Given the two differential systems

$$(2.3A) \quad \begin{cases} \dot A p + 2A\dot p + 2(C-A)qr = 2Pz\gamma_2 - 2f_1p - 2f_4r \\ \dot A q + 2A\dot q + 2(A-C)pr = -2Pz\gamma_1 - 2f_2q - 2f_5r \\ \dot C r + 2C\dot r = 2f_4p + 2f_5q - 2f_3r \\ \dot\gamma_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot\gamma_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \quad \dot\gamma_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad \gamma^2 = 1 - \gamma_3 \end{cases}$$

$$(2.3B) \quad \begin{cases} \dot D u + 2D\dot u + 2(F-D)vw = 2Qd\mu_2 - 2f_6u^3 - 2f_7uv^2 - 2f_{10}w \\ \dot D v + 2D\dot v + 2(D-F)uw = -2Qd\mu_1 - 2f_7u^2v - 2f_8v^3 - 2f_{11}w \\ \dot F w + F\dot w = 2f_{10}u + 2f_{11}v - 2f_9w^3 \\ \dot\mu_1 = w\mu_2 - v\mu_3; \quad \dot\mu_2 = u\mu_3 - w\mu_1, \\ \dot\mu_3 = v\mu_1 - u\mu_2, \quad \mu^2 = 1 - \mu_3 \end{cases}$$

where $Pz, Qd < 0$ are constants, $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $F(t) \in C'(R, R)$,

$f_i(t, p, q, r, \gamma_1, \gamma_2)$, $f_{5+j}(t, u, v, \mu_1, \mu_2) \in C(R, R)$, $(i = 1, ..., 5; j = 1, ..., 6)$ are known functions; $p, q, r, u, v, w, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ the unknown variables.
We can consider (2.3A) and (2.3B) the adimensionate motion equations of two particular rigid bodies with a fixed point and variable mass.

Assumption 4.3.-Assume that for the systems (2.3A) and (2.3B) a theorem of uniqueness holds

Lemma 2.3a. Consider the auxiliary functions of Matrov's type

$$V = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \frac{1}{2}[D(u^2 + v^2) + F\omega^2] \tag{3.3}$$

$$-\frac{1}{2}Pz(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^4) - \frac{1}{2}Qd(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu^4);$$

$$W = A(p\gamma_2 - q\gamma_1) + D(u\gamma_2 - v\mu_1). \tag{4.3}$$

Then we have

$$\dot{V} = -(f_1p^2 + f_2q^2 + f_3r^2 + f_6u^4 + 2f_7u^2v^2 + f_8v^4 + f_9w^4) \tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned} \dot{W} = {} & 2(A - C)qr\gamma_2 - A\dot{p}\gamma_2 + 2Pz\gamma_2^2 - 2f_1p\gamma_2 - 2f_4r\gamma_2 + Ap\dot{\gamma}_2 \\ & -2(C - A)pr\gamma_1 + A\dot{q}\gamma_1 + 2Pz\gamma_1^2 + 2f_2q\gamma_1 + 2f_5r\gamma_1 + Aq\dot{\gamma}_1 \\ & +2(D - F)vw\mu_2 - D\dot{u}\mu_2 + 2Qd\mu_2^2 - 2f_6u^3\mu_2 - 2f_7uv^2\mu^3 \\ & -2f_{10}w\mu_2 + Du\dot{\mu}_2 - 2(F - D)uw\mu_1 + D\dot{v}\mu_1 + 2Qd\mu_1^2 \\ & +2f_7u^2v\mu_1 + 2f_8v^3\mu_1 + 2f_{11}q\mu_1 - Dv\dot{\mu}_3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Lemma 2.3b. If $\inf(f_1, f_2, f_3, f_6, f_7, f_8, f_9) > 0$ we obtain $\dot{V} \leq 0$ and also $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow p = q = r = u = v = w = 0$.

Lemma 2.3c. Suppose that $\inf[A(t), C(t), D(t), F(t)] > 0$ and select

$$\begin{aligned} 4h = {} & A(p^2 + q^2) + Cr^2 + D(u^2 + v^2) + Fw^2 - Pz(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^4) - \\ & -Qd(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu^4) = h' \end{aligned} \tag{7.3}$$

Then, $h = h' = 0 \Leftrightarrow V = 0$ i.e.:$p = q = r = u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$; $\gamma_3 = \mu_3 = 1$.

Lemma 2.3d. Suppose, in the sequel, $A = -Pz$, $D = -Qd$ and

$$V' = -\frac{1}{2}Pz(p^2+q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 - \frac{1}{2}Qd(u^2+v^2) + +\frac{1}{2}Fw^2 \tag{8.3}$$

$$-\frac{1}{2}Pz(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma^4) - \frac{1}{2}Qd(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu^4) \quad (\geq 0);$$

$$W' = -Pz(p\gamma_2 - q\gamma_1) - Qd(u\mu_2 - v\mu_1) \tag{9.3}$$

we obtain that $T = V' + W' \geq 0$ is a positive definite function.

Proof. Since

$$V' = -\frac{1}{2}Pz(p^2+\gamma_2^2) - \frac{1}{2}Pz(q^2+\gamma_1^2) + \frac{1}{2}Cr^2 - \frac{1}{2}Pz\gamma^4 \tag{10.3}$$

$$-\frac{1}{2}Qd(u^2+\mu_2^2) - \frac{1}{2}Qd(v^2+\mu_1^2) + \frac{1}{2}Fw^2 - \frac{1}{2}Qd\mu^4$$

we obtain

$$V' + W' = -\frac{1}{2}Pz(p+\gamma_2)^2 - \frac{1}{2}Pz(q-\gamma_1)^2 + \frac{1}{2}Cr^2 + -\frac{1}{2}Pz\gamma^4 + \tag{11.3}$$

$$-\frac{1}{2}Qd(u+\mu_2)^2 - \frac{1}{2}Qd(v-\mu_1)^2 + \frac{1}{2}Fw^2 - \frac{1}{2}Qd\mu^4 \geq 0.$$

Lemma 2.3e. From the previous lemmas $T = 0 \Leftrightarrow p = q = r = u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ and $\gamma_3 = \mu_3 = 1$.

Proof.- According to $T = V' + W'$ we deduce that $T = 0 \Leftrightarrow p = -\gamma_2$, $q = \gamma_1$, $r = \gamma^4 = 0$, $u = -\mu_2$, $v = \mu_1$, $w = \mu^4 = 0$. From $\gamma = \mu = 0$ i.e.: $\gamma_3 = \mu_3 = 1 \Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$.

Lemma 2.3f. Put $\varphi = -\dot{V}$ and $Y = max(Pz, Qd)$ suppose that f_i, f_{5+j} are bounded then, for every $\xi > 0$, there exist $\xi' > 0$ s.t. $\varphi \leq \xi \Rightarrow grad\varphi \leq \xi'$ and also, from the previous lemmas, on the set $E(\varphi = 0)$ we have:

$$T = -0,5[Pz(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma^4) + Qd(\mu_1^2+\mu_1^2+\mu^4)] \geq 0 \tag{12.3}$$

$$\dot{T} = 2[Pz(\gamma_1^2+\gamma_2^2) + Qd(\mu_1^2+\mu_2^2)] \leq 2Y(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2) \leq 0. \tag{13.3}$$

Theorem 2.3.- Under the previous hypotheses the systems (2.3) are RT. proof.-On the set $E(\varphi = 0)$ the systems (2.3a) and (2.3b) admit respectively the solutions ($p = q = r = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$) and ($u = v = w = \mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = 1$) where $h = 0$. Also $\dot{T} = 0$ if and only if $p = q = r = u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, $\gamma_3 = \mu_3 = 1$. Let $0 < \rho < 1$ and $\rho \leq \sigma \leq 1$, consider the compact set $E' = \{(p, q, r, u, v, w, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) : \sigma \leq \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \leq 1\}$ where we have $\dot{T} \leq 2Y\sigma < 0$. Then there exists a compact set $E" \supset E'$ s.t. $\sigma < die[\partial E", \partial E']$ and $\dot{T} < Y\sigma$ on E".

Example 3.3. Consider the systems defined on $D = I \times [0, 1]$

$$(3.3A) \quad \dot{u} = -f(t, u); \quad (3.3B)\ \dot{v} = -g(t, v)$$

and the perturbed systems

$$(4.3A) \quad \dot{u} = -f(t, u) + f'(t, u); \quad (4.3B) \quad \dot{v} = -g(t, v) + g'(t, v).$$

Assumption 3.3.- Suppose that:1) f, g, f', $g' \in C(D \to I)$ then, for every $(t', z') \in R"$, there exist a solution $u(t) = u(t, t'z')$ of (4.3A) and $v = v(t, t', z')$ of (4.3B) and also suppose that $u(t)$, $v(t)$ are defined for $t \geq t'$. 2) for $0 \leq u, v \leq 1$ we have :

$$\int_0^u |f'(t, s)|ds, \int_0^u f'^2(t, s)ds \leq f'^2(t, u); \int_0^v |g'(t, s)|ds,$$

$$\int_0^v g'^2(t, s)ds \leq g'^2(t, v).$$

Theorem 3.3. Suppose that three functions $a, b, c \in K$ with the following hypotheses exist $\forall t \in I$, $\forall u, v \in [0, 1]$:

$$3.3a)\ a(u + v) \leq \int_0^u f(t, s)ds + \int_0^v g(t, s)ds \leq b(u + v);$$

$$3.3b)\ ||z|| = z^2, \ h = u + v, \quad h' = c(h), \quad \lim_{h \to +\infty} c(h) = +\infty.$$

Then the systems (3.3) are RT with respect to the systems (4.3) for which the assumption (3.3) holds.

Proof. If we assume (for every $t \in I$):

$$V(t, u, v) = \int_0^u [f(t, s) + arctg\, f'^2(t, s)]ds + \int_0^v [g(t, s) + arctg\, g'^2(t, s)]ds; \tag{14.3}$$

$$W(t,u,v)=\int_0^u[f(t,s)-f'(t,s)]ds+\int_0^v[g(t,s)-g'(t,s)]ds. \qquad (15.3)$$

We obtain, according to $2arctg\, z^2 \leq \pi$:

$$a(u+v)\leq V(t,u,v)\leq b(u+v)+(\pi/2)(u+v)=d(u+v) \qquad d\in K \quad (16.3)$$

hence for $u+v=\epsilon \Rightarrow V(t,u,v)\geq a(\epsilon)=l$ and also $h\to 0\Rightarrow V\to 0$.
From (14.3), (15.3) we deduce

$$|V-W|\leq 2[f'^2+g'^2]=2[\|f'\|+\|g'\|]. \qquad (17.3)$$

Therefore, given $\sigma>0$ and select f',g' s.t. $\|f'\|+\|g'\|<\sigma$ we have $|V-W|\leq\sigma$ on D, further $\dot{W}=-2[(f-f')^2+(g-g')^2]\leq 0$.Then, for Theorem 4.2 we conclude the proof.

The author thanks A.S.Andreev for his interest on this work.

REFERENCES

[1] Dubosin G.N. On the problem of stability of a motion under constantly acting perturbation - Trudy gos. astr. Inst. Sternberg 14, (1), (1940), pp. 15-24.

[2] Gantmacher F. Lectures in analytical mechanics MIR, Moscow 1975.

[3] Gorsin S. On the stability under constantly acting perturbation Izv. Akad. Nauk. Kazakh.SSR, 56 Sez.Mat.Mech. (2) (1948), 46-73.

[4] Hahn W. On a new type of stability Journ. of diff. eq.3 (1967), pp. 440-448.

[5] Hatvani L. On the Uniform Attractivity of Solutions of Ordinary Differential Equations by Two Labunov Function Proc. Japan. Acad. 67, sez. A (1991) pp. 162-167.

[6] Hatvani L. On partial asymptotic stability and instability II (the method of limiting equations) Acta Sci. Mat (Szeged) Vol. 46, N. 1-4 (1983), pp. 143-156.

[7] Lakshmikanthan V., Leela S.Differential integral inequality theory and applications Academic Press 1969.

[8] Lakshmikanthan V and Salvadori L. On Massera Type converse theorem in terms of two different measures Boll. UMI.13-A.N2 (1976), pp. 293-301.

[9] Lakshmikanthan V. and Xinzhi Liu On asymptotic stability for non autonomous differential system Nonlinear Analysis, theory, Methods and Application vol.13 N.10 (1989), pp. 1181-1189. 1989.

[10] Liapunov A.M. Problém général de la stabilité du mouvement Princ. Univ. Press, 1949

[11] Malkin I.G. Stability in the case of constantly acting disturbances PMM 8 (1944), pp. 241-245.

[12] Malkin I.G. Theory of stability of motion Gos.Izdat. tekh-theoret Lit.Moscow 1952. English transl. AEC tr-3352, (1958),pp. 75-89.

[13] Matrosov V.M.On the stability of motion PMM Vol. 26 n.5 (1962), pp. 885-895.

[14] Movchan A.A. Stability of process with respect to two metrics PMM 26,6 (1960), pp.998-1001.

[15] Oliveri E. Il teorema dell'energia nella meccanica della massa variabile Atti Accademia Gioenia Serie IV vol. VII, Fasc.3 (1962),pp. 35-46.

[16] Oziraner A.S. On stability of motion relative to a part of variables under constantly actin perturbation PMM Vol.34 (1982) pp. 304-310.

[17] Rouche N. On the stability of motion Int. J. Non-Lin. Mech. 3 (1968), pp. 295-306.

[18] Rouche N. - Habets P. - Laloy M. Stability theory by Liapunov Direct Method Springer Verlag N.Y. Berlin 1977.

[19] Rumiantsev V.V. On the stability of motion in a apart of variables (Russian), Vestnik Moscow Univ. ser. J Math Meh. 4 (1957), pp. 9-16.

[20] Rumiantsev V.V. On the optimal stabilizzation of controlled system PMM 34,3, (1970), pp.440-456.

[21] Salvadori L. Famiglie ad un parametro di funzioni di Liapunov nello studio della stabilità Symposia Math. Accademic Press. London (1971), pp.309-330.

[22] Savchenko A.J. - Ignatyev A.O. Some problems of stability for non autonomous dinamical systems (Russian), Nantovc Dumka, Kiev (1989).

[23] Silov G.E. Analisi Matematica, Funzioni di una variabile ed. MIR. Mosca 1978

[24] Wada T. - Jamamoto N.- Asymptotic stability theorems for a non linear second order differential equation Math Japonica, 34, N.2 (1989), pp. 319-331.

[25] Zappalá G. The influence of perturbations on stability in terms of

two metrics,J.Appl.Maths.Mechs.(PMM),62 (1998), pp. 873-876.

[26] Zappalà G. On total functional stability with two measures Le Matematiche vol. LIII, Fasc. II (1998), pp.263-275.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А.С. Андреев, Е.В. Филаткина

Обосновывается применение знакопостоянных функций Ляпунова в задаче об устойчивости нулевого решения периодической системы по части переменных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = Y(t,y,z) \\ \dot{z} = Z(t,y,z) \end{cases} \tag{1}$$

где y- вектор κ - мерного действительного пространства R^k с нормой $\| y \| = max\,(\,|y_1|,\,\ldots,\,|y_k|\,)$, z- вектор m-мерного фазового пространства $R(z_1,\ldots,z_m)$ с нормой $\| z \| = max\,(\,|z_1|,\ldots,|z_m|\,)$ $x=(y,z)$, $(m+k=n)$, $\| x \| = max\,(\,\| y \|, \| z \|\,)$, правые части системы, функции $Z(t, y, z)$ и $Y(t, y, z)$ определены на множестве $\Gamma = \{t \in \mathrm{R}\,,\ \| y \| < H \le +\infty,\ \| z \| \le +\infty\,\}$ и являются периодическими функциями по t и z с периодом 2π

$$Z(t+2\pi, y, z+2\pi\mathrm{E})=Z(t, y, z), Y(t+2\pi, y, z+2\pi\mathrm{E})=Y(t, y, z) \tag{2}$$

E- единичный вектор- столбец, удовлетворяют условию Липшица по (y, z).

<u>*Определение 1.*</u> Пусть $x = x(t, t_0, x_0)=(y(t, t_0, x_0)\,,\, z(t, t_0, x_0)\,)$, $x_0=(y_0, z_0)$. Точка $x^* = (z^*, y^*)$ называется положительно-предельной точкой этого решения, если существуют последовательности $t_k \to +\infty$ и $\{ l_k^j \in N \}$ такие, что $y(t_k,t_0,x_0) \to y^*, z_j(t_k,t_0,x_0) - 2\pi l_k^j \to z_j^*, 0 \le z_j^* \le 2\pi$, $(j=1,\ldots,m)$, при $k \to \infty$.

Совокупность всех предельных точек образует положительное предельное множество $\omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$.

<u>*Лемма 1.*</u> Пусть решение $x = x(t,\ t_0,\ x_0)$ периодической системы (1) y-ограничено, $\| y(t,\ t_0,\ x_0) \| \le H_l < H$ для всех $t \ge t_0$. Тогда положительное предельное множество $\omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$ этого решения не пусто и связно.

Теорема 1. (*Свойство инвариантности*).

Пусть решение $x = x(t,\ t_0,\ x_0)$ периодической системы (1) y-ограничено, $\| y(t,\ t_0,\ x_0) \| \le H_l < H$ для всех $t \ge t_0$. Тогда положительное предельное множество $\omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$ этого решения инвариантно, т.е.$\forall$ $x_0^* = (y_0^*, z_0^*) \in \omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$ найдется $t_0^* \in [0, 2\pi)$ такое, что $x(t,t_0^*,y_0^*,z_0^*) \in \omega_{2\pi}^{+}(t_0,x_0)$ для всех $t \in R$.

<u>Доказательство:</u> Пусть $p_0 = (y_0^*, z_0^*) \in \omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$ и существует последовательности $t_k \to +\infty$ и $\{ l_k^j \in N \}$ такие, что

$y(t_k,t_0,x_0) \to y_0^*, z_j(t_k,t_0,x_0) - 2\pi l_k^j \to z_{0j}*, 0 \le z_{0j}* < 2\pi$, $(j=1,\ldots,m)$, при $k \to \infty$.

Без ограничения общности будем считать, что для некоторой последовательности $l_k^0 \to +\infty$ имеет место сходимость $t_k - l_0^k T \to t_0^*$, $0 \le t_0^* < 2\pi$, при $k \to \infty$. По определению решения и из равенства (2) несложно вывести, что последовательность решений

$x_k(t) = (y(t + t_k - l_0^k T,\ t_k - l_k^0 T, y_k, z_j - 2\pi l_k^j), z_j(t + t_k - l_0^k T, t_k - l_k^0 T, y, z_j - 2\pi l_k^j) - 2\pi l_k^j)$

будет сходиться к решению

$x = x(t_0^* + t,\ t_0^*, y_0^*, z_0^*) = x(t_0^* + t,\ t_0^*,\ p_0)$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [-\gamma,\ \gamma]$, $(\gamma > 0)$.

Откуда следует, что $x(t,t_0^*,y_0^*,z_0^*) \in \omega_{2\pi}^{+}(t_0,x_0)$ для всех $t \ge t_0$.

Определение 2. Множество M называется инвариантным, если для любой точки $x_0 \in M$ существует момент $t_0 \in [0, 2\pi)$, такой, что решение $x = x(t, t_0, x_0)$ определено и содержится в M для всех $t \in R$..

Пусть $Y(t,0,0) = Z(t,0,0) = 0$, соответственно система (1) имеет нулевое решение $x = 0$.

Пусть $V : R^+ \times \Gamma \to R$ есть непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова, периодическая по t и z с периодом $T = 2\pi$, т. е. выполняется соотношение: $V(t+2\pi, y, z+2\pi E) = V(t, y, z)$ для $(t, y, x_0) \in R^+ \times \Gamma$.

Определим множество $\{\dot{V}(t,x) = 0\}$ как множество точек $x \in \{t \in [0,2\pi)$, $\| y \| < H \le +\infty$, $\| z \| \le 2\pi\}$ в которых производная функции $\dot{V}(t,x)$ в момент $t \in [0, 2\pi)$ равна нулю.

Теорема 2. Пусть для системы уравнений (1) существует функция Ляпунова $V = V(t, x)$ периодическая по t и z с периодом 2π, $V(t+2\pi, y, z+2\pi E) = V(t, y, z)$, производная которой $\dot{V}(t,x) \le 0$. Тогда для каждого y-ограниченного решения $\| y(t, t_0, x_0) \| \le H_1 < H$ для всех $t \ge t_0$, множество предельных точек $\omega^+_{2\pi}(x(t,t_0,x_0)) \subset M$, где M - максимальное инвариантное подмножество множества $\{\dot{V}(t,x) = 0\}$.

Доказательство: Пусть $(y_0^*, z_0^*) \in \omega^+_{2\pi}(x(t,t_0,x_0))$, соответственно последовательности $t_k \to +\infty$ и $\{l_k^j \in N\}$, при этом будем считать, что $t_k - l_k^0 T \to t_0^*$, $0 \le t_0^* < 2\pi$, для некоторой последовательности $l_k^0 \to \infty$.

Последовательность

$$x_k(t) = (y(t + t_k - l_k^0 T, t_k - l_k^0 T, y_k, z_j - 2\pi l_k^j), z(t + t_k - l_k^0 T, t_k - l_k^0 T, y, z_j - 2\pi l_k^j) - 2\pi l_k^j)$$

будет сходиться к решению $x = x(t_0^* + t, t_0^*, y_0^*, z_0^*) = x(t_0^* + t, t_0^*, x_0^*)$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [-\gamma, \gamma]$, $(\gamma > 0)$.

Функция $V(t)=V(t,\ x(t,\ t_0,,\ x_0))$ в силу условия $\dot{V}(t,\ x)\leq 0$ есть монотонно убывающая функция по времени и в силу ее периодичности, ограниченная в ограниченной области. Поэтому, функция $V(t,\ x)$ ограничена снизу, и значит существует предел:

$$\lim_{t\to\infty} V(t,x(t,t_0,x_0))=c_0$$

Отсюда и из периодичности функции $V(t,\ x)$ по t и z можно получить, что

$$V(t,x(t,t_0^*,x_0^*))=c_0$$

Соответственно, производная $V(t,\ x)$ вдоль решения $x = x(t,\ t_0^*,x_0^*\ )$ такого, что $x(t,\ t_0^*,x_0^*\ )\subset\omega_{2\pi}^{+}(x(t,t_0,x_0))$ для всех $t\in R$, равна нулю, $\dot{V}(t,x(t,t_0^*,x_0^*))\equiv 0$.

Теорема доказана.

Как следствие доказанной теоремы и теоремы и теоремы об устойчивости относительно части переменных [1-4] получаем следующие результаты.

Теорема 3. Предположим, что:

1) существуют определенно – положительная по y функция $V = V(t,y,z)$, $V(t+T,x) = V(t,x)$ с производной $\dot{V}(t,\ x)\leq 0$;
2) максимальное инвариантное подмножество M множества $\{\dot{V}(t,x)=0\}$ содержится в множестве $\{x\colon y = 0\}$

Тогда решение системы (1) асимптотически устойчиво по y.

Теорема 4. Предположим, что выполнено условие 1) Теоремы 3, а также:

2) множество $\{V(t,\ x) > 0\}\cap\{\dot{V}(t,\ x)= 0\}$ не содержит целых решений системы (1).

Тогда решение $x = 0$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчивости.

Определение 3. Пусть $M \subset \Gamma$ есть некоторое открытое множество, содержащее точку $x = 0$. Система (1) обладает свойством y - устойчивости относительно M, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $t_0 \in R$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех $x_0 \in \{ \| y \| < \delta \} \cap M$ и всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\| y(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$.

Определение 4. Система обладает свойством равномерной y-устойчивости относительно множества M, если в определении 3 число зависит только от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение 5. Система обладает свойством асимптотической y-устойчивости относительно множества M, если оно устойчиво относительно M и для каждого $t_0 \in R$ существует $\delta = \delta(t_0) > 0$ такое, что для всех $x_0 \in \{\| y \| < \delta\} \cap M$ выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t, t_0, x_0) = 0$.

Определение 6. Система обладает свойством равномерной асимптотической y-устойчивости относительно множества M, если оно равномерно устойчиво относительно M и существует $\eta > 0$ такое, что для любого малого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором для каждого $t_0 \in R$, всех $x_0 \in \{ \| y \| < \delta \} \cap M$ и всех $t \geq t_0 + \delta$ выполняется неравенство

$$\| y(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon.$$

На основе введенных определений и теоремы 2 доказываются следующие теоремы.

Теорема 5. Предположим, что:

1) существует функция Ляпунова $V = V(t, x) \geq 0$, периодическая по t и z, $V(t+2\pi, y, z+2\pi E) = V(t, y, z)$, с производной $\dot{V}(t, x) \leq 0$;
2) система обладает свойством равномерной асимптотической

устойчивости относительно множества $M = \{V(t, x) = 0\}$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1) равномерно y- устойчиво.

Теорема 6. Если в условиях теоремы 4 также выполнено условие

3) множество $\{V(t, x) = c = const > 0\} \cap \{\dot{V}(t,x) = 0\}$ не содержит целых решений системы (1).

Тогда решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теоремы 2- 6 являются новыми в задаче об устойчивости нулевого решения системы (1) относительно y. Эти результаты развивают и обобщают соответствующие теоремы об асимптотической устойчивости относительно части переменных для автономной и периодической систем с y – знакоопределенной функцией Ляпунова из [4-6].

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = -a(t, z_1, z_2, z_3)y + b(t, z_1, z_2, z_3), \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -f(z_1) - c(t, y, z_1, z_2, z_3)z_2 \\ \dot{z}_3 = Z(t, z_1, z_2, z_3) \end{cases} \qquad (3)$$

где $a(t,z_1,z_2,z_3)$, $b(t,z_1,z_2,z_3)$, $f(z_1)$, $c(t,y,z_1,z_2,z_3), Z(t,y,z_1,z_2,z_3)$ - есть непрерывные периодические по t и z_3 с периодом 2π функции, удовлетворяющие условию Липшица по y, z_1, z_2 , z_3 такие, что:

1) $f(0) = 0$, $f(z_1)\, z_1 > 0$ для малых $z_1 \neq 0$;

2) $b(t, 0, 0, z_3) \equiv 0$;

3) $c(t, y, z_1, z_2, z_3) \geq c_0(t) \geq 0$ для $t, z_3 \in [0, 2\pi)$ и малых z_1 и z_2;

4) $a(t, 0, 0, z_3) \geq a_0(t) \geq 0$, для всех $t, z_3 \in [0, 2\pi)$, $a_0(t^*) > 0$ при некотором $t^* \in [0, 2\pi)$;

5) $Z(t, 0, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Тогда нулевое решение (3) равномерно устойчиво по $(y,\ z_1,\ z_2)$, равномерно асимптотически устойчиво по (y, z_1, z_2), если $c_0(t^*) > 0$.

Для доказательства рассмотрим функцию Ляпунова в виде:

$$V(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{2} + \int\limits_0^{z_1} f(\tau)d\tau.$$

Эта функция в силу условия 1) определенно – положительна по z_1 и z_2 Ее производная в силу условия 3) удовлетворяет соотношениям

$$\dot{V}(t,y,z_1,z_2,z_3) = -c(t,y,z_1,z_2,z_3)z_2^2 \le -c_0(t)z_2^2 \le 0$$

для малых z_1 и z_2.

Из первого уравнения системы находим, что множество $\{V(z_1, z_2) = 0\}$ имеет свойство асимптотической y – устойчивости. На основании теоремы 5 получаем свойство устойчивости нулевого решения системы (3) по переменным (y, z_1, z_2).

При выполнении дополнительного условия $c_0(t^*) > 0$ множество $\{V(z_1, z_2) > 0\} \cap \{\dot{V}(t, y, z_1, z_2, z_3) = 0\}$ не содержит решений системы (3). Применяя теорему 6 получаем, что нулевое решение системы (3) является асимптотически устойчивым по переменным (y, z_1, z_2).

Вывести этот результат на основе построения какой-либо функции Ляпунова, используя результаты работ [1-6] при данных предположениях 1) - 5) представляется очень сложным.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России" (проект УР.04.01.004.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. мат. механ., физ., астрон., хим. - 1957. - N 4. - С. 9-16.
2. Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // ПММ. - 1971. - Т. 35. - вып. 1. - С. 147-152.
3. Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. - 1973. - Т. 37. - вып. 4. - С. 659-665.
4. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. - М.: Наука, 1987. - 253 с.
5. Воротников В.И. Устойчивости динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука,1998. - 288 с.
6. Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., Научный мир, 2001. – 320 с.

УДК 531.36

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Е.Б. Ким

Определяется новый вид достаточных условий глобальной стабилизации и управляемости невозмущенного движения нестационарной управляемой системы. Результаты развивают и обобщают результаты из [1] для нестационарного случая.

Рассмотрим систему, которая описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad f(t,0,0) \equiv 0 \tag{1}$$

где x – вектор n-мерного пространства R^n с нормой $\| x \| = max\,(| x_1 |, \ldots, | x_n |)$, u – вектор m - мерного пространства R^m с нормой $\| u \| = max\,(| u_1 |, \ldots, | u_m|)$, $f : R^+ \times R^n \times R^m \to R^n$ непрерывная вектор – функция.

Допустим, что при некотором допустимом управлении $U = U(t, x)$, $U(t,0) \equiv 0$ правая часть системы (1) $f[t, x] = f(t, x, U(t, x))$ удовлетворяет условию Липшица

$$\| f[t, x_2] - f[t, x_2] \| \le L(K) \| x_2 - x_1 \| \tag{2}$$

для любых x_1, $x_2 \in K \subset R^n$ и любого компакта $K \subset R^n$. Тогда система уравнений $\dot{x} = f[t,x]$ предкомпактна в некотором функциональном пространстве и для нее можно определить семейство предельных систем $\{\dot{x} = \theta(t,x)\}$ [2].

На основании теорем из [2, 3] имеем ряд следующих результатов о глобальной стабилизируемости управляемой системы (1) (для удобства ниже через h обозначена функция типа Хана [4], h: $R^+ \to R^+$, $h(0) = 0$, h строго монотонно возрастает).

Теорема 1. Предположим, что существует допустимое управление U: $R^+ \times R^n \to R^m$ и скалярная непрерывная функция V: $R^+ \times R^n \to R^+$ такие, что:

(a) для $x \in \{\| x \| < \delta > 0\}$ $\quad h_1(\| x \|) \le V(t,x) \le h_2(\| x \|)$;

(b) $V(t, x) \to +\infty$ при $\| x \| \to +\infty$ равномерно по $t \in: R^+$;

(c) для всех $(t, x) \in R^+ \times R^n$

$$\dot{V}^+(t,x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{V(t, x + hf[t,x]) - V(t,x)}{h} \le -W(t,x) \le 0$$

(d) для каждой предельной к $(f\,[t, x], W(t, x))$ пары (Φ, θ) множество $\{\theta(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $\dot{x} = \Phi(t,x)$, кроме нулевого, $x = 0$.

Тогда управление $U = U(t, x)$ решает задачу о глобальной равномерной стабилизации невозмущенного движения системы (1) $x = 0$.

Теорема 2. Результат теоремы 1 имеет место также, если ослабить условие относительно функции $V(t, x)$, предположив вместо условия (a) условие $V(t, x) \ge 0$, а вместо условия (d) два условия:

(d) для каждой предельной к $(f[t, x], W(t, x))$ пары (Φ, θ) множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\} \cap \{\theta(t, x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \theta(t,x)$;

(e) невозмущенное движение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{V_\infty^{-1}(t,0)\} \cap \{\theta(t, x) = 0\}$ для каждой предельной пары (Φ, θ).

Аналогичным образом, могут быть определены результаты о простой глобальной стабилизации, о глобальной стабилизации, равномерной по x_0.

Условие локальной управляемости линейной нестационарной системы [1] и теорема 1 и 2 приводят к следующим результатам о глобальной управляемости системы (1).

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 1 или 2, а также условие rank $(K_1, K_2, \ldots, K_n) = n$, $K_1 = B(t)$, $K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t) - \frac{dK_i(t)}{dt}$ для $i=2,\ldots,n$, где $A(t) = f_x(t,0,0)$, $B(t) = f_u(t,0,0)$.

Тогда область нуль-управляемости системы (1) совпадает с R^n.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России" (проект УР.04.01.004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.:Наука, 1972. – 574 с.
2. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. – 1984. – Т.48. – Вып 2. – С. 225 - 332.
3. Андреев А.С., Бойкова Т.А. Об исследовании неустановившегося движения на основе знакопостоянных функций Ляпунова // Фундаментальные проблемы математики и механики. – Ульяновск. – 2002. – Вып. 1(11). – С. 8 - 16.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.

УДК 519.853:517.988

О РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ ПРОЕКЦИОННОМ НЕПРЕРЫВНОМ МЕТОДЕ МИНИМИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.Г. Малинов

(460014 Оренбург, ул. Советская, 2, Институт повышения квалификации)

Предлагается и исследуется метод регуляризации для решения задач минимизации с неточными исходными данными в гильбертовом пространстве, основанный на непрерывном проекционном методе второго порядка. Приводятся достаточные условия сходимости, строится правило останова метода.

1. Рассмотрим задачу минимизации

$$f(\mathbf{x}) \to inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1}$$

где Q - заданное множество, например, образованное координатными ограничениями, из гильбертова пространства H, нормированного скалярным произведением, $\forall \ \mathbf{x} \in H \ \ \|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}$; функция $f(\mathbf{x})$ определена, выпукла и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, ее градиенты удовлетворяют условию Липшица: $\exists \ \ L = const > 0$,

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{u})\| \le L\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{u} \in H; \tag{2}$$

Предполагаем, что

$$inf \ f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q: \ f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \varnothing. \tag{3}$$

Для решения задачи (1) получили распространение непрерывные методы минимизации ввиду их известных достоинств [1]-[4]. Но задача (1) общем случае неустойчива [5] к возмущениям исходных данных (например, в задании функций $f(\mathbf{x})$ и (или) ее производных) и часто решается с помощью регуляризованных методов (см. [6]-[9]). Непрерывные регуляризованные методы для задачи (1) и других задач минимизации при функциональных ограничениях предложены и исследованы во многих работах (см., например, работы [10]-[15]).

Здесь предполагается, что имеется погрешность задания градиентов функции $f(\mathbf{x})$, а для решения задачи (1) исследуется регуляризованный метод минимизации на основе обыкновенного дифференциального уравнения с оператором проектирования в правой части.

2. Пусть функция $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\in C^2[0,+\infty)$ – является решением задачи Коши

$$\sigma(t)\mathbf{x}''(t)+\mathbf{x}'(t)+\mathbf{x}(t)=P_Q[\mathbf{y}(t)+\beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}'(t)-\gamma_2(t)\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{y}(t),t))],\quad t\ge 0, \tag{4}$$

при начальных условиях $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0,\quad \mathbf{x}'(0)=\mathbf{x}^1$,

где $P_Q[\mathbf{v}]$ - проекция точки $\mathbf{v}\in H$ на множество Q; $\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\in Q$ - начальные точки; производные $\mathbf{x}'(t)=d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{x}''(t)=d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ функции $\mathbf{x}(t)$, $t>0$, со значениями в гильбертовом пространстве H, понимаются (как и в [10]-[15]) в смысле главы 4 книги [16]; $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)+\alpha(t)\mathbf{x}'(t)$;

$$\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{y}(t),t)=\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t),t)+\tau(t)\mathbf{y}(t),\qquad \mathbf{y}(t)\in H,\ t\ge 0\ - \tag{5}$$

приближение в точке $\mathbf{y}(t)$ точного градиента $\mathbf{T}'(\mathbf{x}(t),t)=\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))+\tau(t)\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t)\in H,\ t\ge 0$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}(t),t)=f(\mathbf{x}(t))+\tau(t)\|\mathbf{x}(t)\|^2/2$, $\mathbf{x}(t)\in H$; $\sigma(t),\alpha(t),\beta(t),\gamma_1(t),\gamma_2(t),\tau(t)$ – параметры метода (4),(5); приближенные градиенты функции $f(\mathbf{x}(t))$, следуя работам [8]-[15] и др., обозначаем $\mathbf{f}^{'}(\mathbf{x}(t),t)$, отмечая их зависимость от параметра $t \geq 0$. Как и в работах [8]-[15], предполагаем, что решение $\mathbf{x}(t)$ задачи (4),(5) существует на полуоси $[0,\infty)$ при любых начальных точках $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H$. В силу условий для функции $f(\mathbf{x}(t))$, функция $T(\mathbf{x}(t),t)$ дифференцируема по Фреше на множестве Q; полагаем, что выполнено свойство ее непрерывной дифференцируемости на Q.

Заметим, что: 1) одним из итеративных аналогов метода (4),(5) служит регуляризованный двухшаговый четырехпараметрический метод, предложенный и исследованный в работе [17]; 2) метод (4),(5) построен на основе непрерывного метода минимизации второго порядка, исследованного в работе [18]; 3) при $\alpha(t)=0$, $\beta(t)=1$, $\gamma_1(t)=0$, $\sigma(t)=0$ из (4),(5) получаем непрерывный регуляризованный метод проекции градиента [11]; 4) при $\alpha(t)=0$, $\beta(t)=1$, $\gamma_1(t)=0$ из (4),(5) получим регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка [10].

Отметим, что метод (4),(5) относится к классу длинношаговых, обладающих полезными вычислительными свойствами [19]; представляет интерес свойство метода, состоящее в наличии возможности регулирования направления движения к минимуму - вектора $\beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}^{'}(t)-\gamma_2(t)\mathbf{T}_\delta^{'}(\mathbf{y}(t),t))$, путем изменения параметров метода $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

3. Проведем обоснование достаточных условий, при которых траектория метода (4),(5) сильно в H сходится к нормальному решению

$\mathbf{x}^*$ задачи (1). (Далее аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$, ее производных, а также у вводимых коэффициентов, параметров метода и их производных, для краткости часто опускаем.)

Теорема 1. Пусть выполнены такие условия:

1) множество $Q \subset H$ выпукло и замкнуто;

2) выпуклая функция $f(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема по Фреше на $H,$ ее градиенты удовлетворяют условию Липшица (2);

3) приближения $\mathbf{f}'(\mathbf{x},t)$ точных градиентов $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ непрерывны по $\mathbf{x}$ при всех $t \geq 0$, измеримы по t при всех $\mathbf{x} \in H$, имеет место оценка

$$max\left\|\mathbf{f}'(\mathbf{x},t) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\right\| \leq \delta(t)(1 + \|\mathbf{x}\|), \quad \forall \quad \mathbf{x} \in H, \quad t \geq 0; \tag{6}$$

4) $\sigma(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \tau(t), \delta(t)$ - параметры метода (4),(5), таковы, что: $\alpha(t), \beta(t), \gamma_2(t), \tau(t) \in C^2[0,\infty)$; $\delta(t) \in C[0,\infty)$; $\gamma_1(t), \sigma(t) \in C^1[0,\infty)$; функция $\tau(t)$ выпуклая; $\sigma(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma_1(t)$ ограничены;

$\sigma(t) > 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \gamma_1(t) > 0, \quad \gamma_2(t) > 0,$ $\tau(t) > 0, \quad \delta(t) \geq 0, \quad t \geq 0;$

$$\tau'(t) \leq 0, \quad \sigma'(t) \leq 0, \quad \alpha'(t) \leq 0, \quad \beta'(t) \leq 0, \quad \gamma'_1(t) \leq 0, \quad \gamma'_2(t) < 0,$$

$$\alpha''(t) > 0, \quad \beta''(t) \geq 0, \quad \gamma_2''(t) \geq 0, \quad \tau''(t) \geq 0, \quad t \geq 0;$$

$$\tau + \gamma_2 + \delta \to 0, \quad \delta\tau^{-1} + \delta(\gamma_2\tau)^{-1} + \left|\tau'\right|(\gamma_2\tau)^{-1} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{7}$$

$$\delta(\gamma_2\tau)^{-2} + \delta\gamma_2^{-1}\tau^{-2} + \left|\tau'\right|(\gamma_2\tau)^{-2} \to 0, \quad t \to \infty,$$

$$\sigma(t) \to \sigma_0 > 0, \quad \beta(t) \to \beta^0 > 0, \quad \alpha(t) \to \alpha^0 > 0, \quad \gamma_1(t) \to \gamma_1^0 > 0, \quad t \to \infty,$$

$$\tau'(t) \to 0, \quad \alpha'(t) \to 0, \quad \beta'(t) \to 0, \quad \gamma_2'(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Тогда для метода (4),(5),(7)

$$(\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|+\|\mathbf{x}'(t)\|+\|\mathbf{x}''(t)\|)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{8}$$

где $\mathbf{x}^*\in Q_*$, $\|\mathbf{x}^*\|=inf\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}\in Q_*$, - нормальное решение задачи (1),(2).

Сходимость в (8) равномерная относительно выбора приближенных градиентов $\mathbf{f}'(\mathbf{x},t)$ из условия (6).

Доказательство. Схема доказательства аналогична использованным при обосновании сходимости других непрерывных методов минимизации, например, в работах [10]-[13], [15], [20]. Сначала заметим, что в силу предположений теоремы 1 условия (3) выполнены, множество минимумов Q_* выпукло и замкнуто, нормальное решение задачи (4),(5) и минимум функции $f(\mathbf{x})$ существуют. Ввиду сильной выпуклости функции Тихонова на H существует единственная точка $\mathbf{v}^r=\mathbf{v}(r)=arg\,min\,T(\mathbf{x},r)$, $\mathbf{x}\in Q$, $r\geq 0$ (см. [1],[8]) что

$$\sup_{r\geq 0}\|\mathbf{v}^r\|\leq\|\mathbf{x}^*\|,\quad \lim_{r\to\infty}\|\mathbf{v}^r-\mathbf{x}^*\|=0,\quad (\mathbf{T}'(\mathbf{v}^r,r),\mathbf{u}-\mathbf{v}^r)\geq 0,\quad \mathbf{u}\in Q,\quad r\geq 0. \tag{9}$$

Из характеристического свойства оператора проектирования ([8], с. 72) и из (4), пользуясь идеей из работы [2], получаем вариационное неравенство

$$(\sigma\mathbf{x}''+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}'+\beta\gamma_2\mathbf{T}_\delta'(\mathbf{y},t),\mathbf{u}-\mathbf{w})\geq 0\quad\forall\quad \mathbf{u}\in Q,\quad t\geq 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{w}=\mathbf{w}(t)=\sigma\mathbf{x}''+\mathbf{x}'+\mathbf{x}\in Q$. Положим в (10) $\mathbf{u}=\mathbf{v}(r)$ и сложим его с третьим соотношением из (9), приняв в нем $\mathbf{u}=\mathbf{w}\in Q$ и умножив на $\beta\gamma_2 > 0$:

$$(\sigma \mathbf{x}'' + (1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}' + \beta\gamma_2[\mathbf{T}_\delta'(\mathbf{y},t) - \mathbf{T}'(\mathbf{v}^r, r)], \mathbf{v}^r - \mathbf{w}) \ge 0, \quad t, r \ge 0.$$

Преобразуем это неравенство, пользуясь (4), (5) и формулой для точного градиента функции Тихонова, к виду

$$\begin{gathered}(\sigma \mathbf{x}'' + (1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}' + \beta\gamma_2(\mathbf{f}'(\mathbf{y},t) - \mathbf{f}'(\mathbf{y})), \mathbf{v}(r) - \mathbf{w}) + \\ + \beta\gamma_2\{(\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{v}(r))), \mathbf{v}(r) - \mathbf{w}) + (\alpha\tau\mathbf{x}' + \mathbf{v}(r)[\tau(t) - \tau(r)] + \\ + \tau(t)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(r)], \mathbf{v}(r) - \mathbf{w})\} \ge 0, \quad t, r \ge 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, неравенством (см. [21]), $(\varphi'(\mathbf{v}) - \varphi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{z}) \le L\|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|^2/4$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in Q$, справедливым для выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$, из (11) получим:

$$\begin{gathered}(\sigma \mathbf{x}'' + a\mathbf{x}', \mathbf{w} - \mathbf{v}(r)) + \beta\gamma_2\tau\|\mathbf{x} - \mathbf{v}(r)\|^2 + \beta\gamma_2\tau(\mathbf{x} - \mathbf{v}(r), \sigma\mathbf{x}'' + \mathbf{x}') \le \\ \le \beta\gamma_2[\|\mathbf{f}'(\mathbf{y},t) - \mathbf{f}'(\mathbf{y})\|\,\|\mathbf{w} - \mathbf{v}(r)\| + L\|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2/4 + \\ + |\tau(t) - \tau(r)|\,\|\mathbf{v}(r)\|\,\|\mathbf{v}(r) - \mathbf{w}\|], \quad t, r \ge 0,\end{gathered} \tag{12}$$

где $a = 1 - \alpha - \beta\gamma_1 + \alpha\beta\gamma_2\tau$. Далее, пользуясь оценкой

$$max\,\{\sup_{r\ge 0}\|\mathbf{v}(r)\|; \sup_{r\ge 0}\|\mathbf{f}'(\mathbf{v}(r))\|\} \le C_0 = const, \tag{13}$$

следующей из первого соотношения (9), неравенствами (6) и

$$2|ab| \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2, \qquad (a+b)^2 \le (1+\varepsilon)a^2 + (1+\varepsilon^{-1})b^2, \qquad \forall \quad a,b,\varepsilon > 0, \tag{14}$$

выбирая подходящие ε, от (12) придем к неравенству

$$b_{11}(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{v}(r)) + b_{21}(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{v}(r)) + \beta\gamma_2\tau\|\mathbf{x} - \mathbf{v}(r)\|^2 + \sigma^2\|\mathbf{x}''\| +$$

$$+\sigma(1+a)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')+a\,\|\mathbf{x}'\|^2 \le \beta\gamma_2[\delta(t)(1+\|\mathbf{y}\|)\|\mathbf{w}-\mathbf{v}(r)\|+0.25L\,\|(1-\alpha)\mathbf{x}'+\sigma\mathbf{x}''\|^2+$$

$$+0.5(C_0^2\,\gamma_2^{-1}\,|\tau(t)-\tau(r)|^2+\gamma_2\,\|\mathbf{v}(r)-\mathbf{w}\|^2)] \le \beta\gamma_2\delta(C_0+1+\|\mathbf{y}-\mathbf{v}(r)\|)\|\mathbf{v}(r)-\mathbf{w}\|+$$

$$+\beta\gamma_2\{0.25L[(1-\alpha)^2\|\mathbf{x}'\|^2+\sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2+2(1-\alpha)\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')]+$$

$$+0.5C_0^2\,\beta\,|\tau(t)-\tau(r)|^2+0.5\gamma_2\,\|\mathbf{v}(r)-\mathbf{w}\|^2\,], \quad t,\,r\ge 0,$$

где $b_{11}=\sigma(1+\beta\gamma_2\tau)$; $b_{21}=a+\beta\gamma_2\tau$. Отсюда, учитывая оценки

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{v}(r)\|^2 \le (1+\gamma_2)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)\|^2+(1+\gamma_2^{-1})[\,\sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2+\|\mathbf{x}'\|^2+2\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')],$$

$$\beta\gamma_2\,\delta(C_0+1+\|\mathbf{y}-\mathbf{v}(r)\|)\,\|\mathbf{w}-\mathbf{v}(r)\| \le a_1\,\|\mathbf{x}-\mathbf{v}^r\|^2+a_2\|\mathbf{x}''\|^2+a_3\|\mathbf{x}'\|^2+a_4,$$

где $a_1=a_1(t)=\beta\gamma_2\delta(2+3\gamma_2)/2$; $a_2=a_2(t)=\sigma^2\beta\delta(\gamma_2^2+\gamma_2+1)$;

$a_3=a_3(t)=0.5\,\beta\delta[2\gamma_2^2+(\alpha^2+2)(\gamma_2+1)]$, $\qquad a_4=a_4(t)=(C_0+1)^2\,\beta\delta$,

получим:

$$b_{11}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}-\mathbf{v}(r))+b_{21}(\mathbf{x}', \mathbf{x}-\mathbf{v}(r))+b_{31}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)\|^2+b_{41}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')+$$

$$+b_{51}\|\mathbf{x}'\|^2+b_{61}\|\mathbf{x}''\|^2 \le C\,g(t,r), \quad t,r\ge 0,$$

где

$b_{31}=\beta\gamma_2\tau-a_1-0.5\beta\gamma_2^2(\gamma_2+1)$; $b_{41}=\sigma\{1+a-\beta\gamma_2[0.5L(1-\alpha)+\gamma_2+1]\}$;

$b_{51}=a-a_3-0.25\beta\gamma_2[L(1-\alpha)^2-2\gamma_2-2]$; $g(t,r)=\beta\,(\delta+|\tau(t)-\tau(r)|^2)$;

$$b_{61} = \sigma^2 [1 - \beta\delta(\gamma_2^2 + \gamma_2 + 1) - 0.5\beta\gamma_2 (1 + \gamma_2 + 2L)];$$

$$C = max\,[(C_0 + 1)^2;\ 0.5C_0^2].$$

В левой части последнего неравенства учтем равенства (см. [2],[4])

$$2(\mathbf{x} - \mathbf{v}(r), \mathbf{x}'') = \frac{d^2}{dt^2}\left\|\mathbf{x} - \mathbf{v}(r)\right\|^2 - 2\left\|\mathbf{x}'(t)\right\|^2,\ 2(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}'\right\|^2, \tag{15}$$

$$2(\mathbf{x} - \mathbf{v}(r), \mathbf{x}') = \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x} - \mathbf{v}(r)\right\|^2,$$

тогда оно преобразуется к виду

$$b_1(t)\frac{d^2}{dt^2}\left\|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\right\|^2 + b_2(t)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\right\|^2 + b_3(t)\left\|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\right\|^2 + b_4(t)\left\|\mathbf{x}''\right\|^2 +$$

$$+ b_5(t)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}'\right\|^2 + b_6(t)\left\|\mathbf{x}'\right\|^2 \le Cg(t,r), \quad t,r \ge 0, \tag{16}$$

где $b_1(t) = 0.5b_{11};\ \ b_2(t) = 0.5b_{21};\ \ b_3(t) = b_{31};\ \ b_4(t) = 0.5b_{41}(t);$

$b_5(t) = b_{51} - b_{11};$

$b_6(t) = b_{61}$. В силу условий (7) существует число t_0 такое, что при всех $t \ge t_0$ выполняются неравенства

$$\delta < \tau < L/4, \quad (1+\alpha)\gamma_2\tau < \gamma_1, \quad \sigma < min\{1; L/4\},$$

$$\{1 - [(L - 4\tau)/L]^{1/2}\}/2 < \alpha < min\{[1 + ((L - 4\tau)/L)^{1/2}]/2; 3/\delta; 1 - \sigma\}, \tag{17}$$

$$0 < \gamma_2 < \{[(1+3\delta)^2 + 8\tau - 8\delta]^{1/2} - 1 - 3\delta\}/2,$$

при выполнении которых и условиях (7) $b_i(t) > 0, \quad i \in 1{:}6$.

Чтобы доказать (8), покажем, что каждое слагаемое в левой части (8) стремится к нулю. Умножив (16) на функцию $e(t) = exp\left(\int_0^t \tau(s)\gamma_2(s)ds\right)$, проинтегрируем полученное неравенство по $t \in [t_0, t],\ \ t > q \ge t_0$:

$$\int_q^t [(b_1(s)e(s))'' - (b_2(s)e(s))' + b_3(s)e(s)] \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 ds +$$

$$+ \int_q^t \{b_6(s)e(s) \|\mathbf{x}''\|^2 + [b_5(s)e(s) - (b_4(s)e(s))'] \|\mathbf{x}'\|^2\} ds +$$

(18)

$$+ b_1 e \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 + [b_2 e - (b_1 e)'] \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 + b_4 e \|\mathbf{x}'\|^2 \le$$

$$\le C_1 \int_q^t g(s,r)e(s)ds + C_2(q), \qquad t > q \ge t_0, \quad r \ge 0,$$

где $C_1 = C$, $C_2(q)$ не зависит от r и, с учетом (13), (15), (17),

$$C_2(q) = [b_1 \|\mathbf{x}'(q)\| (C_0 + \|\mathbf{x}(q)\|) + b_2(q) - (b_1' + b_1\gamma_2\tau)(C_0 + \|\mathbf{x}\|)^2 + b_4(q) \|\mathbf{x}'\|^2] e(q).$$

Существует достаточно большое число t_1, что кроме (7), (17) имеют место оценки $b_2' < \gamma_2 \tau$, $\sigma_0 \le b_2 < 0.5$, $b_4 \ge \sigma_0$,

$$L\sigma\gamma_2 / 4 < 1 - \alpha, \quad \gamma_2 < (\alpha + \beta\gamma_1)/(\alpha\beta\tau), \quad 0 < 0.5\sigma_0 \le 0.5\sigma < b_1 < \sigma,$$

$$b_1'' \ge 3\sigma\tau, \quad 0 < b_3 < \beta\gamma_2\tau, \quad -1 < \gamma_2', b_1', \tau' \le 0, \quad -2\sigma\tau \le (b_1\gamma_2\tau)' \le 0, \tag{19}$$

коэффициенты при $\|\mathbf{x}'\|^2, \|\mathbf{x}''\|^2$, $\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{x}\|^2$ под интегралами в левой части (18) неотрицательны $\forall \ q \ge t_1 \ge t_0$, где число t_1 достаточно большое. Поэтому, полагая $t > q \ge t_1$, опустим интегралы в левой части (18) как нулевые слагаемые и, учитывая (13), придем к неравенству

$$b_1 e \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 + [b_2 e - (b_1 e)'] \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 + b_4 e \|\mathbf{x}'\|^2 \le$$

$$\le C_1 \int_q^t g(s,r)e(s)ds + C_2(q), \qquad t > q \ge t_1, \quad r \ge 0. \tag{18'}$$

Проинтегрируем (18') на отрезке $[q,t]$:

$$\int_q^t \{[b_2 e - 2(b_1 e)']\|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 + b_4 e \|\mathbf{x}'\|^2\} ds + b_1 e \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 \Big|^{s=t} \le$$

$$\le C_1 \int_q^t \int_q^z g(s,r) e(s) ds dz + C_2(q)(t-q) + C_3(q), \qquad t > q \ge t_1, \quad r \ge 0, \tag{20}$$

где, с учетом (13), $C_3(q) = b_1(q) e(q) (C_0 + \|\mathbf{x}(q)\|)^2$ не зависит от r.

В силу (17), (19) и неравенств $\alpha\tau < 1$, $2\gamma_1\gamma_2\tau\sigma < (1-\alpha^2)\delta$, $2\gamma_2\tau\sigma < 1-\alpha$,

$b_2 e - 2(b_1 e)' \ge 0$, справедливых при достаточно большом t_2, интеграл в левой части (20) неотрицателен при всех $q \ge t_2 \ge t_1$. Заменив этот интеграл нулем,

из (20) и (19) получим:

$$\sigma_0 e \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{x}\|^2 \le 2C_1 \int_q^t \int_q^z g(s,r) e(s) ds dz + C_2(q)(t-q) + C_3(q), \quad t > q \ge t_2, \quad r \ge 0.$$

При $r = t$ и всех $t > q \ge t_2$ отсюда следует:

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{x}(t)\|^2 \le \frac{2}{\sigma_0 e} \left\{ C_1 \int_q^t \int_q^z g(s,t) e(s) ds dz + C_2(q)(t-q) + C_3(q) \right\}. \tag{20'}$$

Поскольку функции $\tau(t)$ выпуклая, монотонная, гладкая, имеет место оценка $0 \le \tau(s) - \tau(t) \le -\tau'(s)(t-s)$ при $t \ge s$, то

$$g(s,t) \le \beta[\delta + \left|\tau^{'}(s)\right|^2](t-s)^2, \quad t \ge s \ge 0, \tag{21}$$

и (20') запишется в виде

$$\left\|\mathbf{v}(t)-\mathbf{x}(t)\right\|^2 \le \frac{2}{\sigma_0 e}\left\{C_1 \int_q^t \int_q^z \beta[\delta + \left|\tau^{'}(s)\right|^2 (t-s)^2] e(s) ds dz + \right.$$

$$\left. + C_2(q)(t-q) + C_3(q)\right\}, \quad t > q \ge t_2. \tag{22}$$

Учитывая (7) и соотношения

$$\beta\delta e(t) \to \infty, \quad b_1(t)e(t) \to \infty, \quad e(t) \to \infty, \quad \{[\tau(t)\gamma_2(t)]^n e(t)\} \to \infty, \quad t \to \infty, \tag{23}$$

применяя к правой части (22) правило Лопиталя достаточное число раз, получим:

$$\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\right\|^2 \to 0, \quad \left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\right\| \to 0, \quad t \to \infty, \tag{24}$$

и, с учетом неравенства $\left\|\mathbf{v}(t)-\mathbf{x}^{*}\right\| \ge \left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{*}\right\| - \left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\|$, а также второго соотношения из (9) при $r = t$, имеем:

$$\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^{*}\right\| \to 0, \qquad t \to \infty. \tag{25}$$

Для доказательства (8) остается доказать оставшиеся два соотношения $\left\|\mathbf{x}^{'}(t)\right\| \to 0$, $\left\|\mathbf{x}^{''}(t)\right\| \to 0$, $t \to \infty$. Покажем выполнение первого из них. Из (18') при $t = r$, с учетом (14) и оценки из (19), следует:

$$\left\|\mathbf{x}^{'}(t)\right\|^2 \le \frac{2}{\sigma_0 e(t)}\left[2b_1 e(\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x}-\mathbf{v}(t)) + C_1\int_q^t g(s,t)e(s)ds + C_2(q)\right] \le$$

$$\le 2\left[2b_1 e\left\|\mathbf{x}^{'}\right\|\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + C_1\int_q^t g(s,t)e(s)ds + C_2(q)\right] / (\sigma_0 e(t)) \le$$

$$\le 0.25\left\|\mathbf{x}^{'}\right\| + \frac{16b_1^2}{\sigma_0^2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + \frac{2C_1}{\sigma_0 e(t)}\left\{\int_q^t g(s,t)e(s)ds + C_2(q)\right\}, \ t > q \ge t_2.$$

Отсюда, с учетом (21) и (24),

$$\left\|\mathbf{x}'(t)\right\|^2 \le \frac{8C_1}{3\sigma_0 e(t)}\left\{\int_q^t \beta[\delta+\left|\tau'(s)\right|^2 (t-s)^2]e(s)ds + C_2(q)\right\},\ t>q\ge t_2. \tag{26}$$

Учитывая (23), (7), применяя к правой части (26) правило Лопиталя, получим:

$$\left\|\mathbf{x}'(t)\right\| \to 0, \quad t\to\infty. \tag{27}$$

Используя (4), (6), (2), (7), (13), равенство $P_Q(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{v}(t),\quad \mathbf{v}\in Q,\quad t\ge 0$, сжимающее свойство оператора проектирования, последовательно вычисляем:

$$\sigma\left\|\mathbf{x}''\right\| \le \left\|P_Q\{\mathbf{y}(t)+\beta[\gamma_1\mathbf{x}'-\gamma_2(\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t),t)+\tau\mathbf{y}(t))]\} - P_Q[\mathbf{v}(t)]\right\| + \left\|\mathbf{x}'\right\| + \left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| \le$$

$$\le (1+\alpha+\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2\tau)\left\|\mathbf{x}'\right\| + (2+\beta\gamma_2\tau)\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + \beta\gamma_2\left\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t),t)-\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t))\right\| +$$

$$+\beta\gamma_2\left\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t))-\mathbf{f}'(\mathbf{v}(t))\right\| + \beta\gamma_2\left\|\mathbf{f}'(\mathbf{v}(t))\right\| + \beta\gamma_2\tau\left\|\mathbf{v}(t)\right\| \le$$

$$\le (1+\alpha+\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2\tau)\left\|\mathbf{x}'\right\| + (2+\beta\gamma_2\tau)\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + \beta\gamma_2\delta(1+\left\|\mathbf{y}(t)\right\|) + L\beta\gamma_2\left\|\mathbf{y}-\mathbf{v}(t)\right\| +$$

$$+C_0\beta\gamma_2(1+\tau) \le \ a_5\left\|\mathbf{x}'\right\| + a_6\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + a_7,$$

где $a_5 = 1+\alpha+\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2(\delta+L+\tau)$; $a_6 = 2+\beta\gamma_2(\delta+L+\tau)$;

$a_7 = \beta\gamma_2[C_0(\delta+\tau+1)+\delta]$. Следовательно, с учетом оценки для $\sigma(t)$ из (19):

$$\left\|\mathbf{x}''(t)\right\| \le \sigma_0^{-1}[a_5(t)\left\|\mathbf{x}'\right\| + a_6(t)\left\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\right\| + a_7(t)], \qquad t>q\ge t_2. \tag{28}$$

Отсюда, учитывая (7), (23) и (26) получаем:

$$\|\mathbf{x}''(t)\| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{29}$$

Из (25), (27) и (29) следует (8).

Правые части оценок в (22), (26) и (28) не зависят от выбора приближений $\mathbf{f}'(\mathbf{x},t)$ градиента функции $f(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (6), предельное соотношение (8) выполняется равномерно относительно выбора приближений $\mathbf{f}'(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющих условию (6).

Теорема 1 доказана.

Примечание. В качестве параметров метода (4),(5), удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут быть выбраны, например, следующие:

$$\alpha(t) = c_1(1+t)^{-1}, \quad \beta(t) = c_2(1+t)^{-1}, \quad \gamma_1(t) = c_3(1+t)^{-1}, \quad \gamma_2(t) = c_4(2+t)^{-1},$$

$$\sigma(t) = c_5 + (1+t)^{-\sigma}, \quad \tau(t) = c_6(1+t)^{-\tau}, \quad \delta(t) = c_7(1+t)^{-\delta}, \tag{30}$$

где числа $c_i > 0$, $i \in 1{:}7$; $c_5 < 1$; $\sigma, \tau, \delta > 0$; $2\tau + 2\sigma < \delta$; параметры

метода $1 - \sigma(t) > \alpha(t)$; $\sigma(t) < 1$; $\delta(t) < \tau(t) < L/4$.

4. Правило останова метода (4),(5),(7) строится аналогично тому, как это сделано, например, в работах [10], [15], [17]. Согласно теореме 1, градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ может быть вычислен в любой фиксированной точке $\mathbf{x} \in H$ с некоторой ошибкой $\delta(t)$, такой, что $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и выполняется (6). Однако, в конкретных задачах ошибка начальных данных обычно больше некоторого фиксированного положительного числа w. Предположим, что для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in H$, вместо вычисления точного значения градиента $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, возможно вычислить его аппроксимацию $\mathbf{f}'_w(\mathbf{x}, t)$ такую, что

$$max \left\| \mathbf{f}'_w(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \right\| \le w(1 + \|\mathbf{x}\|), \qquad \mathbf{x} \in H, \quad t \ge 0, \tag{31}$$

где $w(t) > 0$ известное число. Тогда, заменяя приближенный градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x},t)$ в методе (4), (5), (7) на $\mathbf{f}'_w(\mathbf{x}, t)$ из (31), вместо (4),(5) приходим к методу

$$\sigma(t)\mathbf{z}''(t) + \mathbf{z}'(t) + \mathbf{z}(t) = P_Q\{\mathbf{v}(t) + \beta[\gamma_1 \mathbf{z}'(t) - \gamma_2 (\mathbf{f}'_w(\mathbf{v}(t), t) + \tau\, \mathbf{v}(t))]\},$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{z}(t) + \alpha(t)\mathbf{z}'(t), \quad t \ge 0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0, \quad \mathbf{z}'(0) = \mathbf{z}^1. \tag{32}$$

Однако, для метода (32) условия (7) для параметров $\sigma(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma_1(t)$, $\gamma_2(t), \tau(t)$, соответствующие параметру погрешности $w(t) \equiv w > 0$, $t \ge 0$, будут очевидно нарушены, так что процесс (32) может расходиться и его использование для больших значений t будет неверно. Опираясь на теорему 1, можно построить правило останова и получить ответ на важный вопрос: до какого момента времени $t = t(w)$ нужно продолжить процесс (32), чтобы полученную в его результате точку $\mathbf{z}(t(w))$ можно было взять за приближение к нормальному решению $\mathbf{x}^*$ задачи 1, соответствующее выбранному уровню погрешности $w > 0$? Для этого фиксируем некоторые начальные значения $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H$ и параметры метода, функции

$$\sigma(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \tau(t)\ , \tag{33}$$

удовлетворяющие условиям (7). Могут быть выбраны функции (30) и $w < \delta(0)$.

Поскольку выполнение условий (7) здесь не предполагается, то функция $w = w(t)$, $t \geq 0$, теперь является параметром метода (32), совершенно не связанным с условиями (7). Для каждого фиксированного w, $0 < w < \delta(0)$ в (31), процесс (32) с выбранными параметрами (33) будем продолжать до момента времени $t = t(w)$, определённого из условия

$$t = t(w) = sup\,\{t\colon\ w < \delta(s),\quad 0 < s < t\}. \tag{34}$$

Поскольку $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\delta(0) > w$, требуемый момент времени $t = t(w)$ будет конечным и найдется для каждого фиксированного $w > 0$. Следующей теоремой дается обоснование критерия (34) останова процесса (32).

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены условия теоремы 1, включая (7); 2) при-ближения $\mathbf{f}_w^{'}(\mathbf{x}, t)$ градиентов $\mathbf{f}^{'}(\mathbf{x})$ удовлетворяют условию (31); 3) траектория $\mathbf{z}(t)$, $0 < t < t(w)$ получена методом (32), где момент времени $t = t(w)$ определен в соответствии с правилом останова (34). Тогда

$$\left\|\mathbf{z}(t(w)) - \mathbf{x}^*\right\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad w \to 0. \tag{35}$$

Доказательство теоремы 2 проводится так же, как и соответствующих теорем в

работах [10], [15].

5. Регуляризующий оператор (см. [6]) задачи (1) строится способом, аналогичным использованным в работах [8]-[10], [15] и других. Соотношение (35) соответствует правилу останова (34) и сформулировано для фиксированного уровня ошибки $w > 0$ в (31). При таком уровне погрешности в (31), выполнении правила останова (34) и теоремы 2, регуляризующим будет оператор $\mathbf{R}_w = \mathbf{R}_w(\mathbf{f}'_w(\mathbf{x}(t),t),w)$, сопоставляющий всякому набору своих аргументов, т.е. числу w, $0 < w \le w(\varepsilon)$ и приближению $\mathbf{f}'_w(\mathbf{x},t)$ градиента функции $f(\mathbf{x})$ из (31), точку $\mathbf{z}(t(w))$ метода (32),(34) (см. [1], [6]-[11]). Как и в других непрерывных регуляризованных методах из работ [10]-[15], входящие в определение регуляризующего оператора $\mathbf{R}_w$, $0 < w \le w(0)$, параметры-функции (33) метода (32) удовлетворяют условиям (7), а в остальном произвольны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

2. Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР, 1989. С. 5-43.

3. Недич А. Непрерывный метод проекции градиента третьего порядка для задач минимизации // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1914-1922.

4. Антипин А.С. Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1475-1486.

5. Тихонов А.Н. Об устойчивости задач оптимизации функционалов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6. № 4. С. 631-634.

6. Тихонов А.Н. О некорректно поставленных задачах // Вычислит. математ. и прогр. Вып. 8. Изд-во МГУ, 1967. С. 3-33.

7. Антипин А.С. Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1973. № 2. С. 60-67.

8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400с.

9. Васильев Ф.П. О регуляризации неустойчивых задач минимизации // Труды МИАН СССР. М., 1988. Т. 185. С. 60-65.

10. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 2. С. 3-11.

11. Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными // Вестник МГУ. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 1. С. 3-10.

12. Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А. Об одном регуляризованном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1995. № 3. С. 39-46.

13. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2033-2042.

14. Васильев Ф.П., Недич А., Ячимович М.И. Регуляризованный непрерывный метод линеаризации второго порядка для задач минимизации с неточными исходными данными // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1996. № 3. С. 5-12.

15. Vasiljev F.P., Nedic A. A regularized continuous projection gradient method of the fourth order // Yugoslav J. of Operations research. 1995. V. 5. № 2. P. 195-209.

16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.

17. Малинов В.Г. Четырехпараметрический двухшаговый регуляризованный проекционный метод минимизации // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т. 39. № 4. С. 567-572.

18. Малинов В.Г. О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка // Методы оптимизации и их приложения. Труды 12 Байкальской международной конференции. Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001г. Том 1А. Математическое программирование. Иркутск, 2001. С. 21-26.

19. Антипин А.С. Управляемые методы решения прямых и обратных задач оптимизации. Дисс. ... д. ф.-м. н. М., 1991. 236 с.

20. Антипин А.С., Недич А. Непрерывный метод линеаризации второго порядка для задач выпуклого программирования // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. Матем

. и киберн. 1996. № 2. С. 3-15.

21. Антипин А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. Препринт ВНИИ системных исследований. М., 1979. 73 с.

V. G. MALINOV. ON REGULARIZED PROJECTION CONTINUOUS MINIMIZATION METHOD OF THE SECOND ORDER

A regularization method in Hilbert space is proposed for problems of minimization with inaccurate initial date, based on the continuous projection second order method in conjunction with the Tikhonov function method. Sufficient conditions for the convergence of the method are investigated.

Bibliogr. 16.

[Orenburg, Institute of Qualification Improvement]

Содержание.

Научное издание

Ученые записки
Ульяновского государственного университета

СЕРИЯ
Фундаментальные проблемы математики и механики

Выпуск 2(12)

Ответственный редактор *А.С.Андреев*

Подписано в печать 27.12.2002.
Формат 60x84/8. Гарнитура Times ET.
Усл. печ. л. 10,1. Уч.-изд. л. 8,6.
Тираж 100 экз. Заказное. Заказ № 207/393.

Отпечатано с оригинал-макета
в Лаборатории оперативной полиграфии
Ульяновского государственного университета
432700, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

Обложка отпечатана в студии «Мастер»
432071, г.Ульяновск, ул.Марата, 8