Министерство образования и науки Российской Федерации
Ульяновский государственный университет

РЕФЕРАТ

ПО ИСТОРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК НА ТЕМУ
Наименование наук, по которым проходит подготовку аспирант

ПРОЕКЦИОННЫЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ (ВТОРАЯ ПОЛОВИНА XX ВЕКА)

Реферат выполнил:

Калинов Е.Д.
Ф.И.О. аспиранта или соискателя

Реферат проверил:

Дубровский П.В., канд. техн. наук, доцент
Ф.И.О. ученая степень и ученое звание преподавателя по истории науки

Зачтено с оценкой „Отлично“

17.03.17

Ульяновск, 2017 г.

Содержание

Введение

Проекционно-сеточный метод (в основном – метод конечных элементов) стал в настоящее время эффективным методом решения различных задач математической физики. Это обстоятельство в значительной степени обусловлено развитием мощной электронной вычислительной техники и достижениями математики в области теории проекционных методов, а также теории аппроксимации с помощью функций с конечными носителями.

На протяжении многих десятков лет вариационные методы, представляющие собой частный случай проекционных, используются для решения задач математической физики. Сущность многих из этих методов состоит в формулировке задачи в вариационной форме, как задачи об отыскании функции, реализующей минимум или, в общем случае, экстремум некоторого функционала, и в последующем нахождении приближения к этой функции. [6]

Рассматриваемые сеточные методы своими корнями уходят в вариационное исчисление, с истории развития которого и начинается данный обзор.

1. Возникновение и развитие вариационного исчисления

1.1 Возникновение вариационного исчисления как раздела анализа

Вариационное исчисление и интегральные уравнения являются быстроразвивающимися разделами анализа. Вариационное исчисление устанавливает условия, при которых функционалы достигают своего экстремума.

Одной из первых задач вариационного исчисления была задача Ивана Бернулли о брахистохроне (1696 г.).

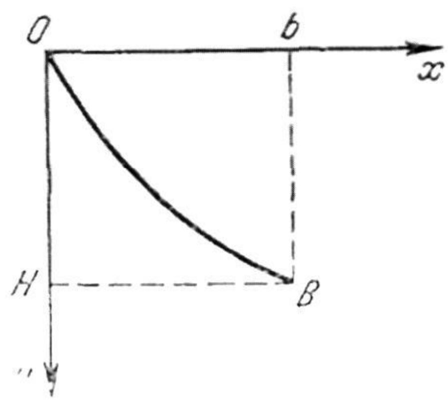


Рисунок 1.1 – Задача о брахистохроне

В вертикальной плоскости даны две точки O и B (рисунок 1.1). По какой линии скатится тяжелая материальная точка, оставаясь в этой плоскости, из верхней точки в нижнюю в наименьший промежуток времени? Начальная скорость равна нулю. Сопротивление движению также полагается равным нулю. Задача сводится к нахождению минимума функционала:

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy}} dx$$

Первое решение этой задачи принадлежало Якову Бернулли, второе – Лопиталю, третье – Ньютону. [26]

Наименование «вариационное» исчисление обязано методу вариаций, при помощи которого решаются экстремальные задачи. Термин ввел Жозеф Луи Лагранж около 1760 г. Для того, чтобы сравнивать значение интеграла I (C) вдоль кривой C с его значениями вдоль соседних кривых, Лагранж изменял функции y(x), z(x), определяющие кривую C, прибавляя к ним величины δ y(x), δ z(x), так же являющиеся функциями x. Эти величины он называл вариациями функций y(x), z(x). Благодаря этим обозначениям Лагранжа теория максимума и минимума функций, подобных I (C), стала называться вариационным исчислением. [5]

Вариационное исчисление связано с такими областями математики, как теория дифференциальных и интегральных уравнений, конечные разности и приближенный анализ, теория функций действительного и комплексного переменного, геометрия и топология теория групп. Вариационные методы проникают в другие разделы математики, создавая возможности непосредственных математических приложений; в то же время само вариационное исчисление обогащает свое содержание за счет связанных с ним математических дисциплин.

Вариационное исчисление возникло в России, где в трудах гениального Эйлера получило вид стройной математической теории, с помощью которой был решен ряд практических задач. В последующее время работы русских (Остроградский и др.) и особенно советских (М. Лаврентьев, Л. Люстерник, Н. Крылов, Н. Боголюбов, И. Петровский, Л. Шнирельман и др.) математиков в области вариационного исчисления имели первостепенное значение. [23]

Возникновение вариационного исчисления и его выделение в самостоятельную математическую дисциплину было обусловлено необходимостью решения ряда геометрических, механических и физических задач экстремального характера. За этими классическими задачами вариационного исчисления установилось название вариационных задач.

1.2. Вариационные задачи в античной древности

Древнейшей из задач, о которых идет речь, является задача изопериметрическая: среди всех замкнутых кривых (поверхностей) данной величины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь (объем).

Уже очень рано древним грекам было известно, что из всех плоских изопериметрических фигур наибольшую площадь имеет круг, а среди тел, обладающих одинаковыми поверхностями (изоповерхностных), наибольший объем имеет шар. Некоторые даже ставят с этим в связь изречение легендарного Пифагора, что «прекраснейшим телом является шар, а прекраснейшей плоской фигурой – круг». По этому же поводу в одной заметке Симпликия в комментарии к «Aristotelis de coelo» (п. 412, ed. Heiberg) говорится: «Доказано в общем и до Аристотеля, поскольку он этим пользуется, как уже доказанным (известным), затем более обширно у Архимеда и Зенодора, что среди изопериметрических фигур наиболее содержательной является из плоских фигур – круг, из пространственных же – шар».

Что же касается Архимеда, то в сочинениях его, дошедших до нас, изопериметрическая задача встречается лишь один раз, именно в заключительном предложении сочинения «О шаре и цилиндре». В этой теореме рассматриваются изоповерхностные сегменты различных шаров и доказывается, что сегмент, имеющий форму полушара, имеет при этом наибольший объем.

Первое из известных нам сочинений об изопериметрических фигурах было написано Зенодором. До нашего времени не дошли ни достоверные данные о времени жизни Зенодора, ни даже его только что упомянутое сочинение. Существуют только довольно подробные изложения его работы, представляющие собой, повидимому, почти буквальные заимствования из его сочинения (такого рода заимствования в античную эпоху, как известно, плагиатом не считались). Время жизни и деятельности Зенодора попадает в период между временем жизни Архимеда (287 – 212 гг. до н.э.), неоднократно упоминаемого в его сочинении, и Квинтилиана (35 – 95 гг. до н.э.), повидимому, пользующегося результатами теории Зенодора. Так, в 1-й книге «Institutio oratoria» (I , 10, 39 - 45, ed. Halma, Leipzig, 1868, стр. 62) Квитилиана говорится: «Кто не поверит оратору, если он скажет, что площадь, ограниченная данными линиями, должна быть равна другой, если линии обхвата имеют одну и ту же длину? Тем не менее, это неправильно, так как это очень сильно зависит от того, какой вид имеет этот обхват; геометры выдвинули упрек против ошибки историков, которые думали, что можно узнать величину острова, объезжая его кругом. Совершеннее будет та форма, которая включает в себя больше площади. Круг является на плоскости наиболее совершенной линией, и он охватывает больше площади, чем квадрат такого же периметра. Квадрат в свою очередь заключает в себе больше площади, чем треугольник, причем равносторонний треугольник больше неравностороннего». Хотя Квинтилиан и не упоминает при этом имени Зенодора, но ясно, что он излагает результаты довольно стройной теории изопериметров, и нет никаких оснований приписывать создание этой теории кому-либо другому, кроме Зенодора.

Теория изопериметрических фигур довольно строго была развита для правильных многоугольников, приводились сравнения правильных многоугольников с кругом того же периметра, совершались попытки решения пространственной изопериметрической задачи. Однако, когда Зенодор пытался доказать, что правильный многоугольник является максимальным из всех многоугольников с тем же периметром и числом сторон, он делает логическую ошибку. Он считает чем-то само собой разумеющимся, что существует такая максимальная фигура и озабочен только выявлением ее свойств. Самая же главная трудность и заключается в доказательстве существования искомой фигуры. Следует заметить, что этот логический пробел не был преодолен еще очень долгое время.

Попытку преодолеть этот недостаток предпринял Люилье (1750-1840), превращая данный треугольник в изопериметрический равнобедренный треугольник и повторяя этот процесс бесконечное число раз. В итоге получен бесконечный ряд равнобедренных треугольников, разность боковой стороны и основания которых по абсолютной величине асимитотически стремилась к нулю. Но такие ученые, как Штейнер (1796-1863), данное доказательство отвергали, так как оно требует бесконечного процесса.

Первое, свободное от явных или неявных ссылок на очевидность существования максимальной фигуры, доказательство основной теоремы изопериметрии было дано лишь в 1882 г. Эдлером. Оно распадается на три части: во-первых, доказывается, что для всякого неправильного многоугольника можно путем конечного числа шагов построить правильный многоугольник, изопериметрический с данными, но имеющий большую площадь; во-вторых, круг сравнивается с площадью изопериметрического с ним правильного многоугольника; в третьих, площадь круга сравнивается с площадью всякой плоской изопериметрической с ним фигуры.

В 1910 г. Каратеодори и Штуди вновь рассмаривают эту задачу, решая ее строгими методами математического анализа. [23]

1.3. Методы решения вариационных задач до Эйлера

Принципиально новую постановку вариационные задачи получили лишь в конце 17 в. К этому времени уже был завершен тот поворот в математике, о котором писал Энгельс в «Диалектике природы»: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференцирование и интегральное исчисление, зачатки которого вскоре были заложены и некоторое в целом было завершено, а не открыто Ньютоном и Лейбницем». В частности, дифференциальное исчисление и его приложения получили такое развитие, что в 1696 г. уже вышел труд, представляющий общее изложение предмета: «Анализ бесконечно малых» Лопиталя. Так же значительны были успехи в создании интегрального исчисления, в решении дифференциальных уравнений и т.д. В это же время оформляется общее понятие функциональной зависимости и появляется сам термин «функция».

Столь быстрое развитие новых методов исчисления обусловливалось, в первую очередь, их тесной связью с механическими, физическими и геометрическими задачами, которые ставило перед математиками бурно растущее производство. Задачи эти решались не всегда с помощью новых исчислений; например, Гюйгенс и Ньютон дали решения ряда задач, не придерживаясь формы и символики исчисления флюксий и дифференциалов. Но громадное преимущество новых методов все ярче выявлялось по мере их успешного приложения к решению практических задач. В частности, успехи в решении экстремальных задач привели к постановке новых задач – вариационных, требующих для своего общего решения дальнейшего развития математического аппарата, создания нового исчисления – вариационного. Вариационные задачи возникли, как конкретные физические и технические задачи. Особенность их математической трактовки, в которых разыскиваются (по современной терминологии) экстремумы функционалов, ясно осознавалась передовыми учеными того времени. По мере накопления решенных вариационных задач, все больше выявлялось и то общее, что объединяло эти разные по содержанию задачи, и то особенное, что выделяло их из класса вообще экстремальных задач. Создавалось все больше предпосылок для создания вариационного исчисления. И оно было создано в начале 18 в. Л. Эйлером, академиком Петербургской Академии Наук.

Первой из вариационных задач этого периода была задача, поставленная Ньютоном в 1687 г. в его «Математических началах натуральной философии»: найти тело вращения, которое при движении в жидкости или газе будет испытывать сопротивление меньшее, чем всякое иное тело вращения, описанное на той же длине и той же наибольшей ширине.

Физические гипотезы, на которые опирается Ньютон при решении этой задачи, следующие: среда, в которой движется тело вращения, представляется равномерно заполненной однородными частицами. Сила сопротивления этой среды равна измерению частиц, столкнувшихся с телом. Таким образом, если α – угол встречи поверхности с направлением движения, то количество частиц, столкнувшихся с поверхностью, равно kp sin α (где k – коэффициент пропорциональности, p – величина поверхности). Сопротивление же, оказываемое одной частицей, пропорционально $\sin^2 \alpha$ (ибо mc sin z – нормальное сопротивление, а его составляющая по направлению движения равна $mv \sin^2 \alpha$).

Ньютон не дал никакого указания на метод, которым он решал свою задачу. Быть может, именно этим обстоятельством можно объяснить то, что задача Ньютона не привлекла вначале к себе внимания ученых и не явилась объектом непосредственно следующих за его работой других исследований. Лишь в 1699 г. в журнале «Acta Eruditorum» появились два решения: Лопиталя – в майской тетради – и И. Бернулли – в ноябрьской. [23]

1.4. Первые работы Эйлера по вариационному исчислению

К тому времени, когда Эйлер вступил на путь научного исследования, были уже созданы известные предпосылки для возникновения вариационного исчисления: на основе развития методов анализа бесконечно малых были поставлены некоторые экстремальные задачи особой природы, названные вариационными, и выработаны специальные приемы их решения. По существу, уже в это время мы встречаемся со всеми основными типами вариационных задач, а в методах их решения все яснее начинают вырисовываться как общие, так и отличительные – в зависимости от характера задачи – черты. При этих обстоятельствах задача систематизации достигнутых научных результатов и их обобщения становится не только актуальной, но и разрешимой; к этому вопросу можно применить мысль Энгельса о завершении, а не о создании дифференциального и интегрального исчислений Лейбницем и Ньютоном и сказать, что после того, как в математику вошли экстремальные задачи более сложной природы, стало абсолютно необходимым создание для их решения специальной дисциплины. Начала этой дисциплины были заложены в первую очередь в работах Лейбница и братьев Бернулли; на долю же Эйлера выпала задача ее создать. [23]

Вариационное исчисление в серии трудов Эйлера приобрело вид общего метода, имевшего своей целью разрешать вариационные задачи, представляя их, как предельные задачи функций конечного числа переменных. При этом кривая интеграции заменялась многоугольником, производная y_i' - отношением $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$, где $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, интеграл $J=\int_a^b f(x,y,y')dx$ - их суммой. Задача об отыскании экстремума функционала заменялась таким образом задачей об отыскании экстремума функции

$$S_n(y_0,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}).$$

2. Возникновение и развитие сеточных методов численного анализа

2.1 Общий обзор сеточных методов

Значительное число задач физики и техники приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных (уравнениям математической физики). Установившиеся процессы различной физической природы описываются уравнениями эллиптического типа. Точные решения краевых задач для эллиптических уравнений удается получить лишь в частных случаях. Поэтому эти задачи в основном решают приближенно.[24]

К решению встречающихся в технике задач прикладной механики существуют два подхода. [2] При одном из них используются дифференциальные уравнения, описывающие поведение некоторой произвольной бесконечно малой области. Другой подход состоит в том, что постулируется вариационный экстремальный принцип, справедливый для всей области. При этом решение минимизирует некоторую величину X, которая определяется как некоторый интеграл от неизвестных величин по всей области. Интегральную величину X, представляющую собой функцию от неизвестных функций, называют функционалом.

С математической точки зрения оба эти подхода эквивалентны, и решение, полученное при одном подходе, является решением при другом подходе. Каждый из этих подходов может быть принят в качестве основного, хотя чаще используется первый. От одного подхода можно перейти к другому с помощью математических преобразований, что является предметом многочисленных книг по вариационным методам.

Различие между этими способами состоит в способах получения приближенного решения. Конечно-разностные методы аппроксимируют дифференциальные уравнения разностными; метод Ритца и его вариант – метод конечных элементов – связаны с приближенной минимизацией функционала.[11]

Несмотря на то, что периоду с 1850 по 1875 г. непосредственно предшествовал период выдающихся достижений таких представителей французской школы теории упругости, как Навье и Сен-Венан, все же по логике вещей именно этот период можно считать отправной точкой обзора сеточных методов. В это время благодаря усилиям Максвелла, Кастильяно и Мора были выработаны основные концепции теории анализа стержневых конструкций. Эти концепции являются краеугольным камнем матричных методов строительной механики, которые окончательно оформились лишь спустя 80 лет и в свою очередь явились основой метода конечных элементов.[7]

С развитием вычислительной техники сеточные методы стали одними из наиболее эффективных методов решения сложных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. В зависимости от способа построения приближенного решения эти методы можно разбить на два больших класса:

• сеточные методы, основанные на непосредственной аппроксимации либо самого дифференциального уравнения, либо соответствующих этому дифференциальному уравнению интегробалансных соотношений–это метод конечных разностей (МКР), метод конечных (контрольных) объемов (МКО)

• сеточные методы, основанные на использовании вариационных формулировок, эквивалентных исходной дифференциальной краевой задаче,– это метод конечных элементов (МКЭ) в различных вариантах (в форме Ритца, Галеркина, наименьших квадратов, коллокации). [22]

Численное решение дифференциальных уравнений математической физики методом конечных разностей проводится в два этапа: 1) разностная аппроксимация дифференциального уравнения на сетке — написание разностной схемы, 2) решение на ЭВМ разностных уравнений, представляющих собой системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка специального вида (плохая обусловленность, ленточная структура матрицы системы). Применение общих методов линейной алгебры для таких систем далеко не всегда целесообразно как из-за необходимости хранения большого объема информации, так и из-за большого объема вычислительной работы, требуемой этими методами. Для решения разностных уравнений уже давно разрабатываются специальные методы, которые в той или иной степени учитывают специфику задачи и позволяют найти решение с затратой меньшего числа действий по сравнению с общими методами линейной алгебры.

Применение различных численных методов (разностных, вариационно-разностных, проекционно-разностных методов, в том числе метода конечных элементов) для решения дифференциальных уравнений приводит к системе линейных алгебраических уравнений специального вида — к разностным уравнениям. Эта система обладает следующими специфическими чертами: 1) она имеет высокий порядок, равный числу узлов сетки; 2) система плохо обусловлена (отношение максимального собственного значения матрицы системы к минимальному велико; так, для разностного оператора Лапласа это отношение обратно пропорционально квадрату шага сетки); 3) матрица системы является разреженной—в каждой ее строке отлично от нуля несколько элементов, число которых не зависит от числа узлов; 4) ненулевые элементы матрицы расположены специальным образом — матрица является ленточной.

Для решения разностных эллиптических задач применяются прямые и итерационные методы. Прямые методы применимы в многомерном случае в основном для задач первой группы (L— оператор Лапласа, G— прямоугольник при $p = 2$ и параллелепипед при $p \wedge 3$, A — пяти- или девятиточечная разностная схема при $p = 2$).Для одномерных задач, когда разностное уравнение имеет второй порядок (матрица является трехдиагональной), а коэффициенты уравнения могут быть переменными, применим метод прогонки, который является вариантом метода Гаусса. Существует ряд вариантов метода прогонки: монотонная прогонка, немонотонная прогонка, потоковая прогонка, циклическая прогонка и др. Для двумерных задач первой группы эффективен метод полной редукции, метод разделения переменных с быстрым преобразованием Фурье, а также комбинация метода неполной редукции с быстрым преобразованием Фурье. Во всех случаях по одному из направлений методом прогонки решается разностное уравнение второго порядка.[24]

Несмотря на то, что приближенная минимизация функционала – самый распространенный способ подхода к методу конечных элементов, это никоим образом не означает, что такой подход является единственно возможным. Например, в первых работах по строительной механике строились чисто физические модели, и, хотя приходилось делать некоторые математические оговорки, касающиеся обоснования и сходимости использованных методов, зачастую получались неплохие инженерные решения.

Существуют и другие возможности, позволяющие математически получить основные соотношения метода конечных элементов непосредственно из диффиренциальных уравнений задачи. Возможные преимущества таких методов состоят в том, что:

1. Исчезает необходимость искать функциональный эквивалент известным дифференциальным уравнениям;
2. Эти методы могут быть распространены на задачи, для которых функционал либо вообще не существует, либо пока еще не получен. [11]

2.2 Проекционный сеточный метод Ритца

Прямой метод нахождения приблизительного решения краевых задач вариационного исчисления был предложен Вальтером Ритцем в 1909 году. Метод предусматривает выбор пробной функции, которая должна минимизировать определенный функционал, в виде суперпозиций известных функций, которые удовлетворяют граничным условиям. При этом задача сводится к поиску неизвестных коэффициентов суперпозиции. Пространственный оператор в операторном уравнении, который описывает краевую задачу, должен быть линейным, симметрическим и положительно-определенным. Метод Ритца применяется для решения задач вариационного исчисления прямым методом. С помощью прямых методов решаются исходные задачи по нахождению функции в заданном классе, которые доставляют экстремальное значение заданному функционалу. [16]

Основные положения метода Ритца:

- Задача по нахождению функции u должна быть сформулирована в вариационной форме
- Решение должно быть представлено в виде конечного линейного ряда вида:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\phi_i+\phi_0(x)$$

где c_i — коэффициенты Ритца, ϕ_0, ϕ_i — аппроксимационные функции

- Коэффициенты c_i находятся из условий минимизации функционала

2.3. Проекционный сеточный метод Бубнова-Галеркина

Метод Бубнова – Галеркина приобрел популярность после исследований Бориса Галеркина в 1915 г. Однако этот метод разработал не он, ранее его применял Иван Бубнов (1913 г.) для решения задач теории упругости. Теоретически метод был обоснован советским математиком Мстиславом Келдышем в 1942 году.

В методе Бубнова-Галеркина в качестве весовой функции выбирается функция формы, то есть W_i = N_i, с помощью которой аппроксимируется решение. [11]

Первым шагом в реализации метода Бубнова-Галёркина является выбор набора базисных функций, которые:

- Удовлетворяют граничным условиям.
- В пределе бесконечного количества элементов базиса образуют полную систему.

Конкретный вид функций определяется из специфики задачи и удобства работы. Часто применяются тригонометрические функции, ортогональные полиномы (полиномы Лежандра, Чебышёва, Эрмита и др.).

Решение представляется в виде разложения по базису:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x).$$

Затем приближённое решение подставляется в исходное дифференциальное уравнение, и вычисляется его невязка. Для однородного уравнения:

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x)\right] = N(x).$$

Для неоднородного уравнения L[u]=f(x) невязка будет иметь вид:

$$N(x) = L[u] - f(x).$$

Далее выдвигается требование ортогональности невязки к базисным функциям, то есть:

$$\int_a^b N(x)\phi_k(x)dx = 0.$$

Отсюда получается однородная система уравнений для коэффициентов в разложении, и удаётся приближённо найти собственные значения задачи. [17]

2.4. Метод конечных элементов

Развитие теории и вспомогательных дисциплин, относящихся к методу конечных элементов, было особенно слабым в период с 1875 по 1920 г. Это происходило в основном из-за наличия реальных трудностей при решении алгебраических уравнений, как только число неизвестных становилось большим. Необходимо, кроме того, заметить, что для конструкций, представляющих наибольший интерес в то время, - рам и ферм – почти всегда применялся подход, основанный на задании распределения напряжений с параметрами нагрузки в качестве неизвестных.

Приблизительно к 1920 г. благодаря усилиям Мэйни в США и Остенфельда в Нидерландах были сформулированы основные идеи численного исследования рамных и фермовых конструкций, основанного на задании перемещений в качестве неизвестных параметров. Эти идеи предшествовали современным матричным методам исследования конструкций. До тех пор пока в 1932 г. Харди Кросс не предложил метод моментных распределений, важнейшим сдерживающим фактором при анализе являлась размерность задач, определяемая числом неизвестных параметров перемещений или нагрузок. Метод моментных распределений позволил численно исследовать поведение конструкций в задачах, на порядок выше более сложных, чем самые трудные из задач, которые решались с помощью ранее существовавших методов. Этот метод стал основой численного исследования поведения конструкций на следующие 25 лет.

Вычислительные машины появились в начале пятидесятых годов прошлого века, однако их действительная значимость как в теоретических, так и в прикладных аспектах не была столь очевидной в то время. Все же некоторые ученые, предвидевшие влияние, которое окажут вычислительные машины, предприняли попытки сформулировать в удобной для компьютеров матричной форме хорошо разработанные к тому времени алгоритмы расчета фермовых конструкций.

В работах Аргириса и Келси, а также Тернера были объединены подходы, используемые при расчете фермовых конструкций, с подходами, применяемыми при расчете сплошных сред; при этом была использована матричная форма записи. Эти работы оказали решающее влияние на развитие метода конечных элементов в последующие годы. Было бы неточным приписывать появление всех основных аспектов метода конечных элементов именно этим работам, потому что ключевые моменты метода имелись даже раньше 1950 г. в работах Куранта, Мак-Генри и Хреникоффа. Особенно важна работа Куранта, так как в ней рассмотрены задачи, описываемые уравнениями, относящимися не только к механике конструкций. [7]

МКЭ базируется на так называемых вариационных постановках, в которых решение краевых задач заменяется минимизацией некоторого функционала. Областью определения этого функционала является гильбертово пространство функций, содержащее в качестве одного из своих элементов и решение u интересующей нас краевой задачи. [22]

Проиллюстрируем метод на одномерном примере.

Пусть в одномерном пространстве P1 необходимо решить следующее одномерное дифференциальное уравнение для нахождения функции u на промежутке от 0 до 1. На границах области значение функции u равно 0:

$$P1:\begin{cases} u''(x) = f(x) in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

где f - известная функция, u - неизвестная функция от x. u″ - вторая производная от u по x. Решение поставленной задачи методом конечных элементов разобьём на 2 этапа:

- Переформулируем граничную задачу в так называемую слабую (вариационную) форму. На этом этапе вычислений почти не требуется.
- На втором этапе разобьём слабую форму на конечные отрезки-элементы.

После этого возникает проблема нахождения системы линейных алгебраических уравнений, решение которой аппроксимирует искомую функцию.

Если u есть решение, то для любой гладкой функции υ, которая удовлетворяет граничным условиям υ = 0 в точках x = 0 и x = 1 , можно записать следующее выражение:

$$(1)\int_0^1 f(x)\upsilon(x)dx = \int_0^1 u''(x)\upsilon(x)dx\,.$$

С помощью интегрирования по частям преобразуем выражение (1) к следующей форме:

$$\int_0^1 f(x)\upsilon(x)dx = \int_0^1 u''(x)\upsilon(x)dx =$$

$$(2)\ = u'(x)\upsilon(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)\upsilon'(x)dx =$$

$$= -\int_0^1 u'(x)\upsilon'(x)dx = -\phi(u,\upsilon).$$

Оно получено с учётом того, что υ (0) = υ (1) = 0.

Разобьём область, в которой ищется решение $u \in H_0^1$ такое, что

$$\forall\, \upsilon \in H_0^1, -\phi(u,\upsilon) = \int_0^1 f(x)\upsilon(x)dx$$

на конечные промежутки, и получим новое пространство V:

$$(3)\, u \in V$$

такое, что

$$\forall \upsilon \in V, -\phi(u,\upsilon) = \int_0^1 f(x)\upsilon(x)dx$$

где V - кусочная область пространства H_0^1. Есть много способов для выбора базиса V. Выберем в качестве базисных функций такие υ_k, чтобы они представлялись прямыми линиями (полиномами первой степени):

$$\upsilon_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, x \in [x_k, x_k + 1] \\ 0, x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases}$$

для k = 1 , … , n − 1 (в данном примере n = 5).

Если теперь искомое приближённое решение представить в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \upsilon_k(x),$$

а функцию f (x) аппроксимировать как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \upsilon_k(x),$$

то с помощью (3) можно получить следующую систему уравнений относительно искомых υ_k:

$$-\sum_{k=1}^{n-1} u_k \phi(\upsilon_k, \upsilon_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k \int \upsilon_k \upsilon_j dx,$$

где j = 1 , … , n − 1.

Начиная с середины пятидесятых годов прошлого века метод конечных элементов в своем развитии прошел через ряд непрерывных модификаций. Так же как и при формулировке специальных элементов для плоского напряженного состояния, исследователи выписали конечно-элементные соотношения для твердого деформируемого тела, изгибаемых пластин, тонких оболочек и других конструктивных форм. Как только были получены соотношения для исследования статического поведения линейно-упругого материала, внимание специалистов было переключено на такие аспекты, как динамическое поведение, выпучивание, а также геометрическая и физическая нелинейности. Вслед за этими исследованиями наступил период довольно интенсивного развития вычислительных программ «общего назначения», обусловленный желанием обеспечить практиков возможностью применять указанный метод. [7]

Метод конечных элементов легко программируется для быстродействующих вычислительных машин и достаточно эффективен, поскольку с помощью ЭВМ можно решать большие системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются после дискретизации задачи. Данный факт во многом определил развитие именно этого метода решения краевых задач. [11]

Перед началом выполнения расчета конструкции следует представить ее в виде, понятном электронному мозгу, то есть компьютеру. И так как компьютер может оперировать только с цифрами, то и конструкция должна быть представлена именно в цифровом варианте. Таким образом, нужно создать математическую модель, которая будет не только полностью соответствовать рассчитываемой конструкции, но и состоять только из цифр. Целью работы будет решение этой математической модели и определение неизвестных.

Суть метода конечных элементов заключается в разбиении всей области, занимаемой конструкцией, на некоторое количество малых подобластей с конечным размером. Эти подобласти носят название конечных элементов, а само разбиение называется дискретизацией.

Форма конечных элементов будет зависеть от типа самой конструкции и характера деформации. Например, конечными элементами в расчете стержневых конструкций (ферм, балок или рам) будут участки стержней, при расчетах двумерных континуальных систем (пластин, плит или оболочек) — прямоугольные или треугольные подобласти, а при расчете трехмерных конструкций (массивов или толстых плит) — подобласти в виде тетраэдров или параллелепипедов. Но в отличие от настоящей конструкции в такой дискретной модели связывание конечных элементов происходит только в отдельных узлах (точках) некоторым известным количеством узловых параметров.

Функционалом энергии всей конструкции при дискретизации будет алгебраическая сумма отдельных функционалов конечных элементов, и для каждой подобласти должен быть задан независимый от других закон распределения требуемых для решения функций. С помощью этих законов возможно выражение перемещений (искомых непрерывных величин) в пределах заданного конечного элемента через значения величин в конечных точках.

Число узлов и число их возможных перемещений (степень свободы) для конечного элемента могут варьироваться, но меньше минимального количества, необходимого для рассмотрения состояний конечных элементов под действием напряжения или деформации в данной принятой модели, их быть не должно. Степени свободы конечных элементов определяются числом независимых перемещений во всех их узлах. Степень свободы всей рассчитываемой конструкции и, как следствие, алгебраический порядок уравнений системы будет определяться суммированием числа перемещений всех известных ее узлов. Исходя из того, что основные неизвестные в расчете методом перемещений — искомые узловые перемещения, то понятия степени свободы конечных элементов и конструкции целиком становятся особо важными в методе конечных элементов.

Способ дискретизации рассматриваемой области, количество конечных элементов, число их степеней свободы, а также форма используемых приближенных функций оказывают непосредственное влияние на точность расчета всей конструкции.

В развитии сеточного метода конечных элементов можно выделить следующие этапы:

1. В развитии метода конечных элементов свои роли сыграли как вариационные основы механики, так и математические методы, которые были основаны на вариационных принципах. Разбитие задачи с помощью вариационного метода Ритца было впервые применено Рихардом Курантом в 1943 году, и только в 50-е годы двадцатого века увидели свет такие же работы других ученых (Поли, Герша и других).
2. Весомый вклад в развитие метода был сделан Джоном (Иоаннисом) Аргирисом. Именно он к расчету стержневых систем применил матричную формулировку на базе основных энергетических принципов, определил матрицу податливости и обратную ей матрицу жесткости. Научные труды Аргириса и его коллег, которые были опубликованы с 1954 по 1960 годы, стали отправной точкой для матричного отображения известных в то время численных методов и позволили применять их с помощью электронно-вычислительных машин для расчетов конструкций.
3. Современная концепция метода была изложена группой американских ученых (Тэрнером, Клаффом, Мартином и Топпом) в 1956 году. Они, решая задачу теории упругости на плоскости, применили новый элемент треугольной формы и сформировали для него не только матрицу жесткости, но и вектор узловых сил. Название же метода конечных элементов, под которым его знают и по сей день, ввел в действие ученый Клафф в 1960 году. В следующее пятилетие после этого было опубликовано множество работ по нахождению конечных элементов для двумерных и трехмерных конструкций, среди авторов следует отметить таких ученых, как Р. Мак-Лей, Р. Мелош, Дж. Бесселин, Ф. де Веубеке,

М. Джонс, Т. Пиан. В 1967 году увидела свет и первая монография, посвященная методу конечных элементов, под авторством И. Чанга и О. Зенкевича.

4. Математическая теория метода появилась лишь в 70-х годах, ее зарождение прослеживается в трудах таких ученых, как И. Бабушки, Р. Галлагер, Ж. Дек-лу, Дж. Оден, Г. Стренг, Дж. Фикс. Весомый вклад был внесен и российскими учеными. Так, например, В.Г.Корнеев сопоставил математические сущности метода конечных элементов и вариационно-разностного метода и указал на их совпадение. Над той же темой трудился Л.А.Розин. А А.С.Сахаровым была разработана моментная схема КЭ.
5. Последнее время, особенно последние десятилетия, характеризуются активным развитием и применением метода конечных элементов для расчета динамики конструкций, оптимизации проектирования и учета нелинейного поведения. [20]

Перспективным направлением является развитие смешанных методов конечных элементов для решения краевых задач трехмерной теории упругости, которые дают преимущества над классическими постановками данного метода в напряжениях и перемещениях и обеспечивает высокую точность и гладкость приближенных решений для силовых и кинематических неизвестных. На практике, использование смешанного метода конечных элементов ограничено высокой размерностью получаемых систем сеточных уравнений, что приводит к существенному увеличению вычислительных затрат. Одним из возможных решений данной проблемы может стать разработка алгоритмов применения ортогональных финитных функций для аппроксимации отыскиваемых величин, что приводит к формированию разреженных систем уравнений особой структуры, допускающей четырехкратное упрощение при их решении. [14] Применение таких систем позволяет проводить исключение силовых неизвестных в аналитической форме до решения задачи на ЭВМ, что делает метод сравнимым по затратам машинного времени с методами, основанными на вариационных принципах Лагранжа и Кастильяно.[13]

Также важным фактором для повышения точности расчета может стать применение вложенных и адаптивно-встраивающихся сеток. Получив предварительное решение, например, на равномерной сетке и установив основные особенности, можно провести перерасчет решения в подобластях на сгущающихся сетках. В качестве граничных условий на границах этих подобластей сохраняются значения величин, полученные на начальной сетке путем их интерполяции на вновь введенные узлы. Уточненное решение вновь проектируется на первоначальную сетку. Затем процесс вычислений повторяется. Данный подход на сегодняшний день недостаточно обоснован, но он может послужить основой для получения предварительных решений.[12]

Для расчета методом конечных элементов разработано большое количество программ. Первоначально они имели узкоспециальное назначение и часто составлялись на машинном языке. Подмеченное в процессе различных приложений сходство в структуре программ привело к созданию более совершенных и универсальных программ. Одним из первых примеров является программа ASKA, составленная под руководством профессора Аргириса (Штутгарт) и ориентированная на определенный тип машины. Например, в области исследования аэрокосмических проблем особое значение имеет возможность решения множества различных задач; составление универсальной программы для расчета небольшого числа задач малоэффективно.

Быстрые темпы развития вычислительной техники привели к необходимости создания программы на языке, понятном любой машине. Возможности алгоритмического языка ФОРТРАН обусловили его широкое использование для программирования при решении задач методом конечных элементов.

Программа NASA (Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства) представляет собой попытку создания гибкой программы для широких исследований и решения задач Американской аэрокосмической промышленности.

Созданные в Суонси программы FESS (Finite Element Solution Swansea) и FINIESSE были больше ориентированы на эффективное решение инженерных задач строительной механики малых и средних размеров, таких, например, как расчет мостов, плотин, ядерных реакторов. При их разработке основное внимание уделено созданию простой системы, которую легко приспособить к любым конкретным задачам.

Программы, реализующие метод конечных элементов, могут иметь различное значение. Чаще всего требуется только решение линейных задач в упругой постановке, однако число степеней свободы может быть различным, от нескольких десятков до нескольких тысяч. В задачах динамики и устойчивости может потребоваться отыскание собственных значений, а для решения нелинейных задач может оказаться необходимым применение различных итерационных методов.

Типичная программа, реализующая метод конечных элементов, состоит из ряда общих блоков, которые в различных контекстах могут использоваться по-разному. Такими блоками являются ввод исходных данных, вычисление жесткости элементов, решение уравнений, построение матрицы масс, нахождение собственных значений, вычисление напряжений и вывод на дисплей.

При программировании такие блоки используются как подпрограммы. Для обеспечения взаимосвязанности входные параметры этих подпрограмм должны быть стандартизованы. Тогда при составлении новой программы в каждом конкретном случае можно просто комбинировать соответствующие подпрограммы, и вся дополнительная работа программиста сведется лишь к введению каких-либо новшевств или дополений, связанных со спецификой задачи.

В таких системах управляющая программа обычно представляет собой очень простую программу, которая обращается в соответствующем порядке к различным подпрограммам. Для некоторых классов задач можно создать стандартные управляющие программы и автоматизировать выбор нужных подпрограмм. В больших организациях, имеющих дело с некоторыми определенными типами задач, создание таких стандартных программ может оказаться чрезвычайно полезным.

В качестве примера структуры программы, реализующей метод конечных элементов, на рисунке 2.1 представлена блок-схема программы расчета линейной задачи о плоской деформации. [11]

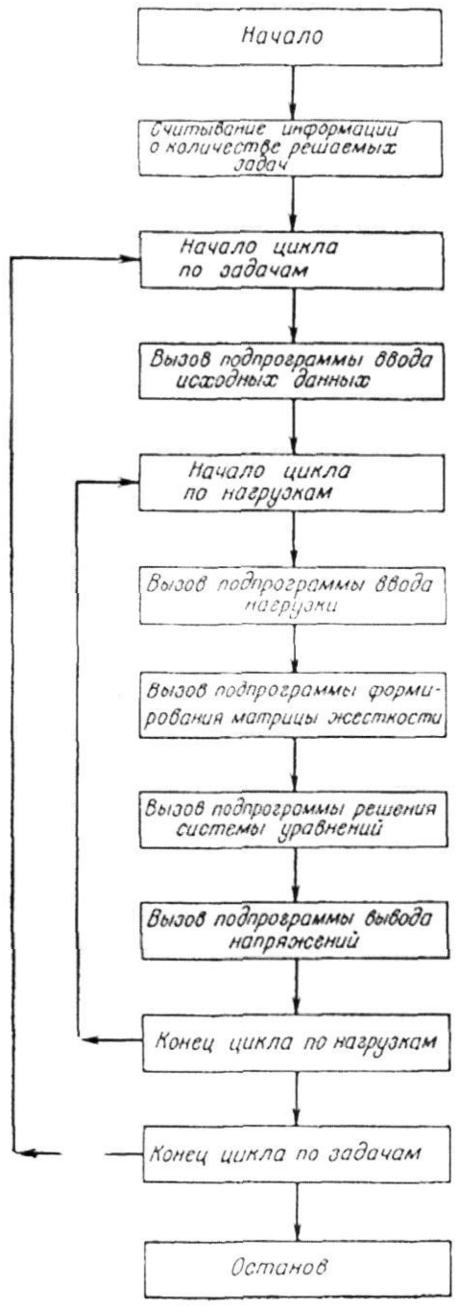


Рисунок 2.1 – Блок-схема программы, реализующей МКЭ

Для работы программы, реализующей метод конечных элементов, дополнительно требуется четыре основные системы исходных данных:

1. Координаты и характеристики элементов;
2. Свойства материала каждого элемента;
3. Граничные условия;
4. Нагрузки.

3. Применение сеточных методов численного анализа в проектировании авиационной техники во второй половине XX века

3.1. Применение в аналитическом решении задач проектирования

Развитие метода конечных элементов многим обязано работам исследователей, занятых проектированием аэрокосмической техники, поэтому неудивительно, что именно эта область исследований остается ведущей по количеству приложений метода конечных элементов. Рисунок 3.1 отражает много аспектов использования метода конечных элементов при расчете конструкции самолета «Боинг-747» при его проектировании в 60-х гг 20 века. Фюзеляж самолета состоит из тонких листов металла (обшивка), охватывающих всю несущую конструкцию, набранную из элементов, называемых шпангоутами и стрингерами. Силовые элементы крыла называются лонжеронами и нервюрами.

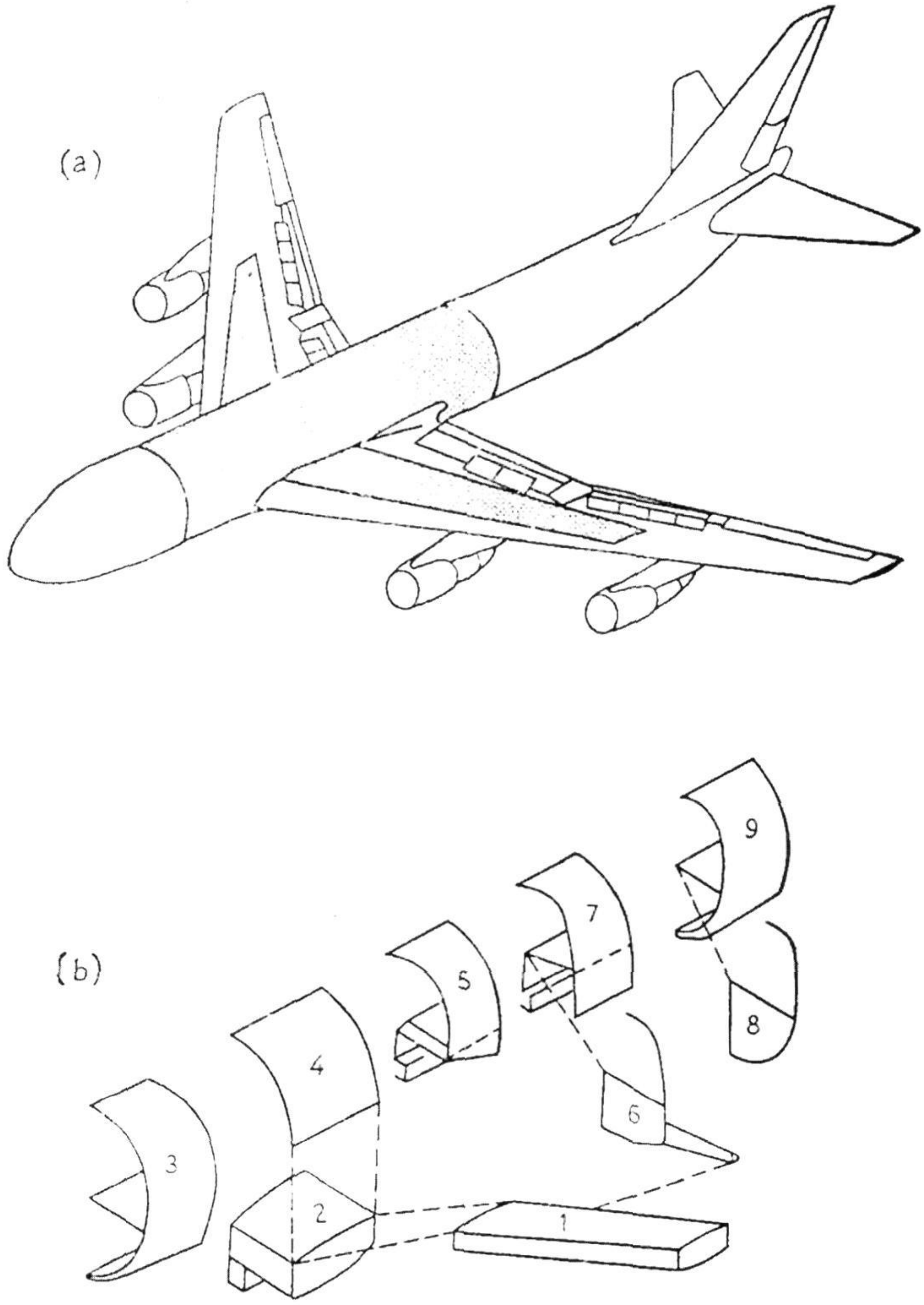


Рисунок 3.1 – Конечно-элементный анализ самолета «Боинг-747». а) Самолет «Боинг-747» (заштрихованные области отвечают исследованным с помощью метода конечных элементов участкам конструкции самолета). b) Подконструкции, используемые в конечно-элементном анализе заштрихованных областей

Опыт показал, что при расчете полей напряжений во всей конструкции можно не учитывать локальное выпучивание обшивки летательного аппарата. Поэтому обшивку представляли состоящей из плоско-напряженных элементов, таких, как например, треугольные и четырехсторонние элементы, а несущую конструкцию моделировали набором цилиндрических оболочечных элементов. Расчет методом конечных элементов участка соединения крыла с фюзеляжем самолета «Боинг-747», изображенного на рисунке 3.1 (В), потребовал около 7000 неизвестных переменных. Наличие столь большого количества неизвестных неудобно с точки зрения обработки начальных данных и выявления возникающих при счете ошибок. Поэтому на практике конструкцию разбивали на части, или, другими словами, на подконструкции (суперэлементы) и каждая из подконструкций рассчитывалась методом конечных элементов. На конечном этапе расчетов суперэлементы объединялись с помощью обычной конечно-элементной схемы. Подробности счета приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Параметры конечно-элементного представления центральной части самолета «Боинг-747»

Подконструкция	Описание	Узлы	Число нагруженных секций	Балки	Пластины	Связанные степени свободы	Общее число степеней свободы
1	Крыло	262	14	355	363	104	796
2	Корневой отсек крыла	267	8	414	295	198	880
3	Фюзеляж	291	7	502	223	91	1026
4	”	213	5	377	185	145	820
5	”	292	7	415	241	200	936
6	Стенка	170	10	221	103	126	686
7	Фюзеляж	285	6	392	249	233	909
8	Стенка	129	10	201	93	148	503
9	Фюзеляж	286	7	497	227	92	1038
Всего		**2195**	**63**	**3374**	**1979**	**555**	**7594**

Как обычно, при проектировании самолета проводятся натурные испытания «Боинга-747». На рисунке 3.2 приведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчета методом конечных элементов. Следует отметить, что ни одно из численных решений, полученных другими методами на основе упрощающих предположений, при проектировании конструкций не привело бы к столь точному совпадению, чем это было достигнуто с помощью метода конечных элементов.

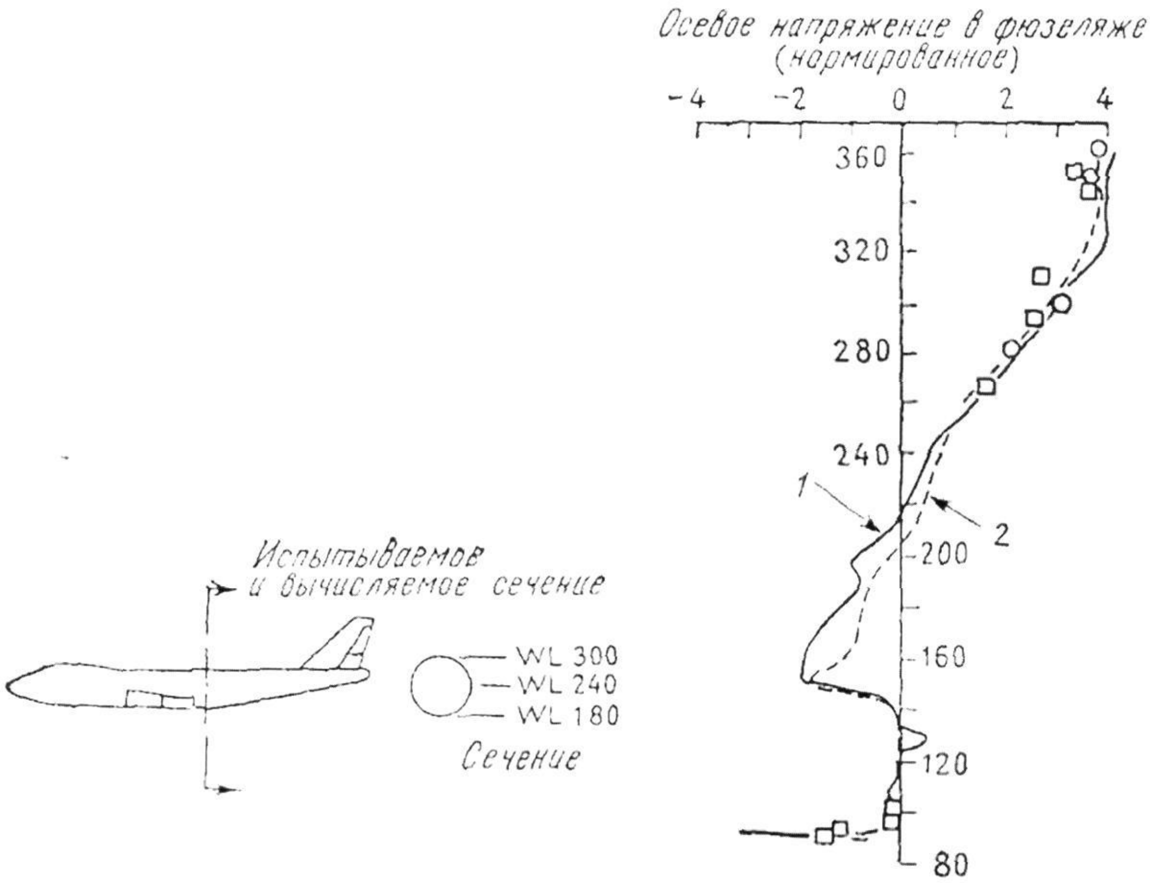


Рисунок 3.2 – Сравнение результатов натурных испытаний с результатами расчетов методом конечных элементов. ○ значения осевых напряжений, полученные при испытаниях; □ значения напряжений в обшивке, полученные при испытаниях. 1 – вычисленные напряжения с помощью четырех конечных элементов для «Боинга-747»; 2 – вычисленные напряжения с помощью пяти конечных элементов для «Боинга-747».

Анализ динамического поведения летательного аппарата важен как для осуществления компоновки аппарата, так и для оценки несущей способности и упругой неустойчивости, являющейся существенной формой разрушения самолета. Ни одно из перечисленных явлений нельзя адекватно исследовать численно на базе упрощающих предположений, кроме как методом конечных элементов. [7]

В начале второй половины 20 века в СССР также активно развивалось применение МКЭ в проектировании авиационной техники для расчета пластин и оболочек – таких элементов, как крылья малого удлинения или топливные баки. Идеализирование подобных тел с помощью обычных трехмерных элементов оказывалось неэкономичным, так как такой подход приводил к конечно-элементным моделям с большим числом степеней свободы. Использование соотношений теории пластин и оболочек позволяло свести задачу к двумерной. Деформированное состояние оболочки или пластины полностью определялось перемещением срединной поверхности и углом поворота прямолинейного отрезка до деформации нормального к срединной поверхности (нормального отрезка или просто нормали). Дискретизация тела сводилась к разбиению на конечные элементы срединной поверхности, а в качестве основных неизвестных выступают узловые значения перемещений срединной поверхности и углов нормали.

На рисунке 3.3 а, б показаны варианты конечно-элементной идеализации крыла и бака. Крыло идеализируется с помощью произвольных четырехугольных, а также треугольных элементов.

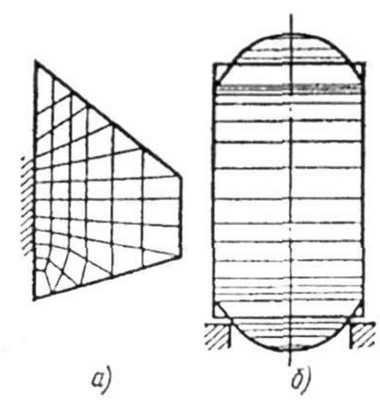


Рисунок 3.3 – Варианты конечно-элементной идеализации элементов конструкции самолета: а) крыла; б) бака

Для определения деформированного состояния конечного элемента выполнялась аппроксимация перемещений срединной поверхности и угла поворота нормали через узловые перемещения. [18]

3.2. Применение программных систем с сеточными методами в качестве математического аппарата в решении задач проектирования

С развитием ЭВМ развивались и программные системы МКЭ-анализа. Так, в Советском Союзе были разработаны системы МКЭ КОМПОЗИТ и ДИАНА.

Система МКЭ КОМПОЗИТ, получившая развитие в 70-е годы 20 века, предназначена для анализа несущей способности конструкций из композитных материалов, активно внедряемых в изготовление авиатехники. Характерной особенностью этой программы является возможность анализа напряженно-деформированного состояния на уровне армирующих элементов (волокон) и матрицы, то есть на микроуровне композитного материала. Переход на макроуровень осуществляется путем усреднения с учетом структуры и свойств компонентов, составляющих композит, а также технологии изготовления композитных материалов. Анализ несущей способности конструкций проводился на макроуровне с учетом реальных свойств композитного материала – анизотропии и неоднородности по координатам. Таким образом, исходными данными для расчета являются свойства волокон и матрицы, структура армирования и геометрия конструкции.

Система МКЭ КОМПОЗИТ позволяет проводить линейный и линеаризованный анализ напряженно-деформированного состояния, устойчивости и динамического поведения стержней, балок, пластин и оболочек из композитных материалов, а также тонкостенных конструкций, составленных из этих элементов. Возможен расчет конструкций из традиционных материалов

– металлов и сплавов. В этом случае задаются макросвойства материала и программные модули для микромеханического анализа не используются.

Система МКЭ КОМПОЗИТ создавалась по модульному принципу. В случае необходимости отдельные модули заменяются другими. Структура системы позволяет ее расширять – пополнять библиотеку новыми конечными элементами или проводить нелинейный анализ конструкции. [21]

Система метода конечных элементов ДИАНА разработана специалистами конструкторского бюро А.Н.Туполева. Первая версия системы появилась в 1978 году и с тех пор интенсивно развивалась и совершенствовалась. Система впитала в себя опыт проектно-конструкторских работ по таким самолетам как Ту-204, Ту-334, Ту-324, Ту-54, Ту-34 и их модификациям. ДИАНА позволяет анализировать статическую и динамическую прочность, устойчивость и температурные поля, механику разрушения различных конструкций. Тип конструкции определяется набором конечных элементов, который составляет около 50 элементов. Основным достоинством системы можно считать ее открытую структуру, позволяющую иметь доступ ко всем данным, используя необходимые алгоритмы и процедуры доступа к внутренним данным. В 1994 она получила первую премию на конкурсе им. академика А.И.Макаревского в ЦАГИ. Система сертифицирована, имеет свидетельство сертификационного центра "ЦАГИ-ТЕСТ" АРМАК.

Данная система продолжает развиваться и в данное время. Так, в 2001 году для системы ДИАНА был разработан инструмент для быстрой и удобной подготовки конечно-элементной модели конструкции и анализа результатов счета – интерфейс VisualDIANA. В системе предусмотрен замкнутый цикл анализа прочности– подготовка данных, расчет по системе ДИАНА, анализ напряженно-деформированного состояния (НДС). [15]

На рисунке 3.4 представлены конечно-элементные модели обшивки самолета и части его крыши в окне VisualDIANA.

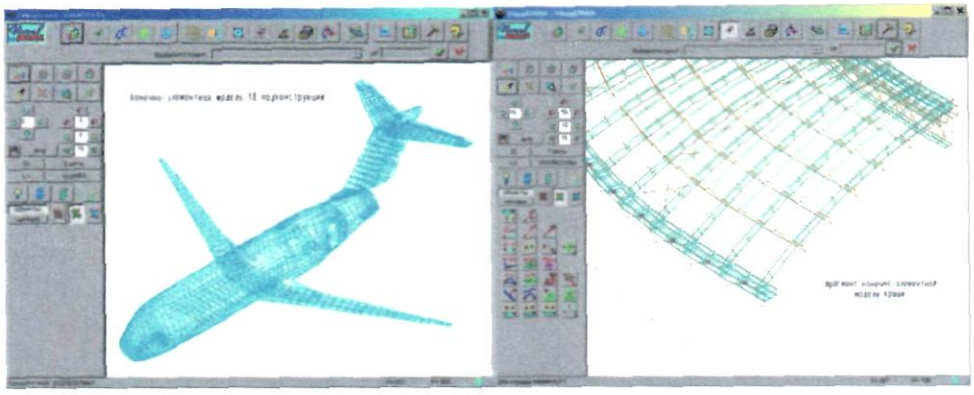


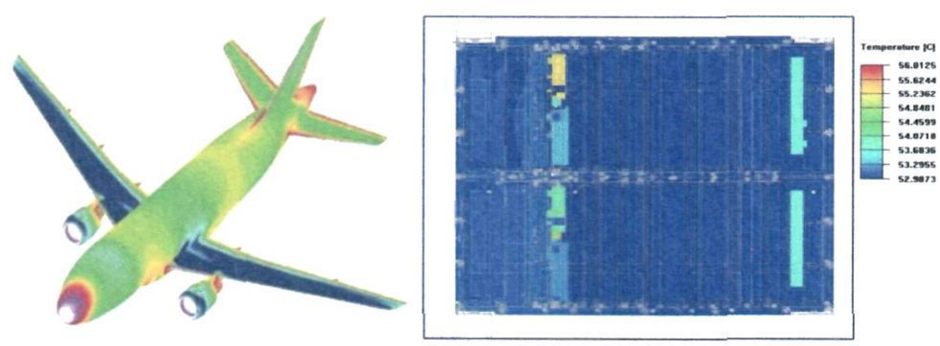
Рисунок 3.4 – Конечно-элементные модели обшивки самолета и части его крыши в окне VisualDIANA

На Западе развивались такие универсальные программные системы конечно-элементного анализа, как ANSYS, начало разработки которой стартовало в 1970 г. [1]

Первая реализация программы значительно отличалась от последних её версий и касалась только решения задач теплопередачи и прочности в линейной постановке. Как и большинство других программ того времени, она работала в пакетном режиме и лишь на супер-ЭВМ. В начале 70-х годов в систему было внесено много изменений в связи с внедрением новой вычислительной технологии и реализацией запросов пользователей. Были добавлены нелинейности различной природы, появилась возможность использовать метод подконструкций, была расширена библиотека конечных элементов. Компания обратила внимание на появившиеся в то время персональные компьютеры и векторные графические терминалы. В течение нескольких лет эти новые аппаратные средства были освоены программными разработками компании. В конце же 1970-х годов существенным дополнением к системе ANSYS стал интерактивный режим работы. Это значительно упростило процедуры создания КЭ модели и оценку результатов (пре- и пост-процессорная обработка). Стало возможным использовать интерактивную графику для проверки геометрии модели, заданных свойств материала и граничных условий перед началом счёта. Графическая информация могла быть сразу же выведена на экран для интерактивного контроля результатов решения.

В настоящее время решения Ansys охватывают практически все сегменты инженерной отрасли: от тяжелого машиностроения, оборонной промышленности и аэрокосмической техники до микроэлектроники, медицины и симуляторов для тестирования ПО. [19]

С каждым днем все больше компаний использует программные продукты ANSYS для улучшения аэродинамики летательных аппаратов (рисунок 3.5 а), моделирования работы двигателей, проектирования гидравлических и механических систем, расчета электромагнитной совместимости оборудования, расчета воздействий на бортовое радиоэлектронное оборудование в режиме эксплуатации (рисунок 3.5 б) [10], экологического контроля и других задач, критически важных в области авиастроения.[27] Технологии ANSYS играют ключевую роль в развитии проектов по увеличению безопасности полетов и уменьшению негативного влияния от таких явлений, как шум, обледенение, разряды молний, удары птиц и других повреждений от посторонних объектов. Использование инструментов и расчетной платформы ANSYS для комплексного междисциплинарного моделирования позволяет оптимизировать все составляющие воздушных судов, начиная от работы отдельных компонентов и узлов до функционирования всей системы в целом. [19]



а б

Рисунок 3.5 – Результаты применения модулей ANSYS для моделирования: а – обтекание полной модели пассажирского самолета; б – распределение температуры в блоке управления

В дальнейшем вероятно развитие решателей для мультифизических расчетов, учитывающих одновременное воздействие нескольких факторов различной природы (например, тепловое воздействие и механическое) на объект исследования. На данный момент возможно использование результатов одного воздействия в расчете следующего, без учета динамики изменения свойств материала в первом случае.

Также будут появляться новые и дорабатываться существующие дополнительные функции для модулей с уже разработанными и используемыми решателями, облегчающие процесс моделирования. Такие возможности, как, например, непосредственное перестроение сетки при решении в случае искажения при больших перемещениях, диагностика причин несходимости при решении нелинейных задач реализованы в единичных программных пакетах и на данный момент недостаточно надежны. [4]

Заключение

В настоящее время программы общего назначения неплохо распространены в прикладных областях. Доступность таких программ при относительно средних затратах в процессе их использования объясняются широкими прикладными возможностями метода конечных элементов. Что касается развития метода, то многие исследователи и в настоящее время заняты построением новых конечно-элементных моделей и дальнейшим улучшением схем и алгоритмов для описания конкретных явлений, а также составлением новых программ. Наиболее интересными вопросами являются конечно-элементное представление и численный анализ физических процессов при взаимодействии конструкций с внешними полями. Известным примером последнего могут служить расчет термоупругих конструкций, где вычисление температурных напряжений тесно связано с определением меняющегося распределения температур, а также анализ взаимодействия жидкости и упругой конструкции в задачах гидроупругости.

Несмотря на определенные отличительные особенности и характерные преимущества метода конечных элементов при численном анализе механических систем, этот метод вряд ли может быть последним словом в численном анализе в том виде, в котором он существует в настоящее время. Его следует рассматривать как одну из многочисленных ступеней развития средств численного исследования при проектировании.

Литература

1 ANSYS, Inc. URL:http://plmpedia.ru/wiki/ANSYS,_Inc. (дата обращения 26.02.2017)

2 Crandall S.H., Engineering Analysis, Mcgraw-Hill, 1956

3 Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению – Москва: государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 248 с.

4 Ахут Рао. Нелинейные возможности ANSYS / Ахут Рао; пер. с анг. К. Басова // ANSYS Solutions. Русская редакция, 2007.

5 Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению / перевод с английского Ю.К. Солнцева. Москва: Издательство иностранной литературы, 1950. – 347 с.

6 Введение в проекционно-сеточные методы. Марчук Г. И., Агошков В. И. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.

7 Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1984. – 428 с.

8 Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 с.

9 Гобыш А. В., Шокина Н. Ю. Анализ вычислительных схем методов конечных элементов и конечных разностей для моделирования течений несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 22-30.

10 Ефременков И. В., Калинов Е. Д. Расчет напряженно-деформированного состояния электронного блока управления под тепловым воздействием // МНИ «СФиПИ». 2016. №2. Т.2. С. 34-42.

11 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике – Москва: Мир, 1975. – 543 с.

12 Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии, 2002. - №2.

13 Лавыгин Д.С. Смешанный метод конечных элементов в трехмерных задачах теории упругости // Современные проблемы науки и образования, 2013. - №5.

14 Лавыгин Д.С., Леонтьев В.Л. Алгоритм смешанного метода конечных элементов решения задач теории стержней // Инженерный вестник Дона, 2013. - №4.

15 Лысухин В. И. Современные интерактивные средства системы метода конечных элементов ДИАНА // Московский авиационный институт. Электронный журнал «Прикладная геометрия». 2009. Выпуск 11. С. 23-45.

16 Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977, 456 с.

17 Метод Галеркина. URL:studopedia.ru/8_54924_metod-galerkina.html (дата обращения 23.02.2017)

18 Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: Учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов. – Москва: Высш. шк., 1985. – 392 с.

19 Применение ANSYS: Авиация и космос. URL:http://www.ansys.soften.com.ua/ansys-solutions/aerospace.html (дата обращения 26.02.2017)

20 Применение метода конечных элементов в строительстве. URL:www.it-nv.ru/articles/primenenie_metoda_konechnih_elementov_v_stroitelstve#jump_link_1 (дата обращения 25.02.2017)

21 Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинанте, 1988. – 284 с.

22 Рояк М. Э., Соловейчик Ю. Г., Шурина Э. П. Сеточные методы решения краевых задач математической физики: Учеб.пособие. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 1998. – 120 с.

23 Рыбников К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления. // Историко-математические исследования: Труды семинара МГУ по истории математики – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 507 с.

24 Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Издательство «Наука», 1978. – 592 с.

25 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1979. – 392 с.

26 Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения – Москва: Издательство «Наука», 1966. – 176 с.

27 Чернышев С. Л. Задачи механики в авиастроении. XI всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 года. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. – с. 4390-4407.