На правах рукописи

Благовисная Анна Николаевна

# КЛАССИЧЕСКИЕ РАДИКАЛЫ И ЦЕНТРОИД МАРТИНДЕЙЛА АРТИНОВЫХ И НЁТЕРОВЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ульяновск – 2019

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Оренбургский государственный университет»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | кандидат физико-математических наук, доцент,<br>**Пихтилькова Ольга Александровна** |
| Официальные оппоненты: | **Воскресенская Галина Валентиновна**<br>доктор физико-математических наук, доцент,<br>ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»,<br>профессор кафедры алгебры и геометрии; |
| | **Пчелинцев Сергей Валентинович**<br>доктор физико-математических наук, профессор,<br>ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», профессор Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий |
| Ведущая организация: | ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого» |

Защита состоится 18 декабря 2019 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» по адресу: ул. Набережная р. Свияги, 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета и на сайте ВУЗа https://www.ulsu.ru, с авторефератом – на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации https://vak.minobrnauki.gov.ru.

Отзывы по данной работе просим направлять по адресу: 432970, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д.42, УлГУ, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Автореферат разослан «___» _________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.278.02
к.ф.-м.н., доцент Волков М.А.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Изучение алгебраических систем является существенной частью современных исследований в общей алгебре. Результаты, получаемые при исследовании алгебр Ли, находят своё применение в различных областях математики и физики. Например, алгебры Ли оказываются полезным инструментом при изучении структуры многообразий в топологии, дифференциальной геометрии. В квантовой механике рассмотрение операторов, действующих в пространстве состояний системы, зачастую приводят к математическим структурам, в числе которых оказываются и алгебры Ли.

Особый интерес для теории групп представляют бесконечномерные алгебры Ли. Известен пример неразрешимой группы, удовлетворяющей тождеству $x^p = 1$ для $p \geq 5$, построенный Ю.П. Размысловым с помощью бесконечномерных алгебр Ли[1]. А.И. Кострикиным использовались бесконечномерные алгебры Ли при решении проблемы Бернсайда[2].

Одной из основных задач, возникающих при исследовании алгебраических систем, является построение структурной теории, позволяющей свести изучение исходной системы к более простой, исследование свойств которой позволило бы в конечном счёте обобщить полученные результаты на исходную систему. Радикал является важным инструментом построения структурной теории алгебраических систем. Благодаря А.Г. Курошу и С. Амицуру, которые для алгебр и колец рассмотрели понятие радикала, теория радикалов получила ещё большее распространение, и стала использоваться при исследовании различных алгебраических структур, в том числе, и для построения структурной теории алгебр Ли.

Помимо радикалов, существуют и другие понятия, играющие роль инструмента исследования алгебраической системы. В теории ассоциативных колец и модулей разработаны такие объекты, как кольца частных[3,4] и центроид Мартиндейла[5]. Эти же понятия могут быть сформулированы и для алгебр Ли и найти применение при создании для них структурной теории.

Теории групп и алгебр Ли посвящены работы многих математиков. Можно утверждать, что развитие структурной теории алгебр Ли началось с построения теории конечномерных алгебр Ли, зарождение которой относится к концу XIX века. Работы С. Ли, Ф. Энгеля, Э. Картана, В. Киллинга, ставшие классическими для современной алгебры, заложили фундамент для возникновения ключевых понятий и методов теории радикалов алгебр Ли.

---

[1] Размыслов, Ю.П. Об энгелевых алгебрах Ли / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.– 1971. – Т. 10. – № 10. – С. 33–44.

[2] Кострикин, А.И. Вокруг Бернсайда / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1986 – 232 с.

[3] Ламбек, И. Кольца и модули / И. Ламбек. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 283 с.

[4] Beidar, K.I. Rings with generalized identities. Pure and Applied Mathematics / K.I. Beidar, W.S. Martindale, A.V. Mikhalev. – New-York: Marcel-Dekker, 1996.

[5] Размыслов, Ю.П. Тождества алгебр и их представления / Ю.П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

В XX веке началось изучение бесконечномерных алгебр Ли, возникающих при изучении векторных полей гладких многообразий. Вопросами теории бесконечномерных алгебр Ли занимались Ю.А. Бахтурин, М.В. Зайцев, Е.И. Зельманов, А.И. Кострикин, А.А. Михалёв, С.П. Мищенко, Ю.П. Размыслов и другие. В это же время проводятся исследования, в которых вводятся и изучаются различные радикалы бесконечномерных алгебр Ли. Данные исследования опубликованы в работах К.И. Бейдара, В.Н. Латышева, А.В. Михалёва, В.А. Парфёнова, С.А. Пихтилькова, Л.А. Симоняна, N. Kamiya, F. Kubo, S. Togo.

В XXI веке продолжились исследования, систематизирующие и развивающие структурную теорию бесконечномерных алгебр Ли. В работах С.А. Пихтилькова, В.Н. Латышева, А.В. Михалёва, К.И. Бейдара, И.Н. Балабы, О.А. Пихтильковой, В.М. Полякова, Е.В. Мещериной представлены результаты исследования первичного, локально нильпотентного, верхнего и нижнего слабо разрешимых радикалов, а также радикала Джекобсона и связанных с ним конечно неприводимо представленного, $PI$-неприводимо представленного, неприводимо представленного радикалов.

Построение общей структурной теории для произвольных алгебр Ли затруднительно, поэтому выделяются специальные классы алгебр, для которых такую теорию построить возможно. В таком случае в качестве предмета исследования рассматриваются алгебры Ли, удовлетворяющие каким-либо ограничениям или условиям. В качестве дополнительных условий, накладываемых на алгебры Ли, рассматриваются условия обрыва возрастающих или убывающих цепей идеалов, подалгебр, подпространств (нётеровость и артиновость), выполнение полиномиального тождества и другие.

Понятие радикала позволяет из класса алгебраических систем выделить полупростые и радикальные системы, описать структуру которых значительно проще, чем исходную систему.

Важной проблемой является проблема определения единого радикала бесконечномерных алгебр Ли, позволяющего получать удовлетворительную структурную теорию алгебр Ли. Удовлетворительная структурная теория предполагает наличие такого радикала, который позволит находить общие свойства всей исследуемой алгебраической структуры.

Одним из радикалов, рассматриваемых в теории конечномерных алгебр Ли и отвечающих требованиям структурной теории, является радикал, который понимается как наибольший разрешимый идеал[6]. При попытке ввести аналогичным образом понятие радикала для бесконечномерных алгебр Ли возникают определённые трудности, которые прежде всего связаны со свойством суммы разрешимых идеалов. Дело в том, что такая сумма не всегда оказывается разрешимым идеалом. Не дал результатов и подход, предполагающий рассмотрение локально разрешимого радикала. Для локально разрешимых идеалов бесконечномерных алгебр Ли авторским коллективом

[6]Капланский, И. Алгебры Ли и локально компактные группы Ли / И. Капланский. – М.: Мир, 1974. – 150 с.

в составе В.Н. Латышева, А.В. Михалёва и С.А. Пихтилькова[7] также доказано, что при суммировании локально разрешимых идеалов в результате получается идеал, не являющийся локально разрешимым.

Впервые радикал, обладающий необходимыми свойствами для создания рассматриваемой теории, определил и исследовал В.А. Парфёнов. В своей статье[8] В.А. Парфёнов рассмотрел в качестве радикала наибольший слабо разрешимый идеал, который назвал слабо разрешимым радикалом.

Помимо радикала, называемого слабо разрешимым, исследователями открыты и другие, обладающие необходимыми для построения структурной теории свойствами, радикалы алгебр Ли. В частности, к таким радикалам относится первичный радикал.

Исследование первичного радикала проводилось для алгебр Ли, удовлетворяющих различным дополнительным условиям. Так, например, в работах И.Н. Балабы, К.И. Бейдара, С.А. Пихтилькова проведено исследование свойств первичного радикала специальных алгебр Ли. Ряд публикаций С.А. Пихтилькова, О.А. Пихтильковой, В.М. Полякова, Е.В. Мещериной посвящен изучению свойств первичного радикала различных артиновых алгебр Ли.

Интерес представляют соотношения первичного радикала алгебр Ли с разрешимыми радикалами. С.А. Пихтильков и О.А. Пихтилькова[9] доказали, что первичный радикал произвольной специальной алгебры Ли содержит локально нильпотентный радикал. Для обобщённо специальных алгебр Ли К.И. Бейдаром и С.А. Пихтильковым показано совпадение первичного радикала с наибольшим локально разрешимым идеалом и слабо разрешимым идеалом[10,11].

Исследуются и свойства первичного радикала алгебр Ли. Особое внимание уделяется вопросам разрешимости первичного радикала. Так, С.А. Пихтильков[12] доказал разрешимость первичного радикала нётеровой алгебры Ли, в статье Е.В. Мещериной, С.А. Пихтилькова, О.А. Пихтильковой[13] рассматривается доказательство разрешимости первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих различным условиям

---

[7]Латышев, В.Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В.Н. Латышев, А.В. Михалёв, С.А. Пихтильков // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2003. – № 3. – С. 29–32.

[8]Парфёнов, В.А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В.А. Парфёнов // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 171–176.

[9]Пихтильков, С.А. О некоторых классических радикалах для специальных алгебр Ли / С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2008. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 153–157.

[10]Бейдар, К.И. О первичном радикале специальных алгебр Ли / К.И. Бейдар, С.А. Пихтильков // Успехи матем. наук. – 1994. – № 1. – С. 233.

[11]Бейдар, К.И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К.И. Бейдар, С.А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 643–648.

[12]Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С.А. Пихтильков. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2013. – 171 с.

[13]Мещерина, Е.В. О проблеме А.В. Михалёва для алгебр Ли / Е.В. Мещерина, С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4(2). – С. 84–89.

артиновости. Разрешимость первичного радикала специальной артиновой алгебры Ли доказана С.А. Пихтильковым[14]. Также доказано и свойство локальной разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли[15].

Таким образом, исследование свойств первичного радикала является одной из актуальных задач теории радикалов алгебр Ли.

В теории конечномерных алгебр Ли рассматриваются также нильпотентный радикал, радикал Джекобсона.

Применение нильпотентного радикала и радикала Джекобсона в теории бесконечномерных алгебр Ли также вызывает затруднения в силу невыполнения определённых требований, которым должен удовлетворять радикал алгебраической системы. Поэтому актуальным является вопрос о том, какие радикалы бесконечномерных алгебр Ли будут удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам нильпотентного радикала и радикала Джекобсона теории конечномерных алгебр Ли.

Другой конструкцией, используемой при изучении строения алгебр Ли, является центроид Мартиндейла. Полезной конструкция центроида Мартиндейла оказалась при исследовании специальных алгебр Ли. Согласно работам Ю.П. Размыслова[16] рассмотрение первичных специальных алгебр Ли над центроидом Мартиндейла может выступать как условие конечности. Благодаря этому, возможно исследование структуры первичных специальных алгебр Ли, а также применение первичного радикала при решении задач теории радикалов алгебр Ли. Например, поиск условий, при которых присоединённая алгебра $AdL$ является первичной ассоциативной $PI$-алгеброй, или условий существования наибольшего локально нильпотентного идеала в обощённо специальной алгебре Ли[17].

Рассмотренные примеры подтверждают актуальность исследований, связанных с радикалами и центроидом Мартиндейла, построенных для алгебр Ли.

В настоящей работе продолжается изучение радикалов алгебр Ли, начатое С.А. Пихтильковым. В частности, особое внимание уделено решению проблем, сформулированных А.В. Михалёвым и М.В. Зайцевым для артиновых и нётеровых алгебр Ли. С формулировками данных проблем автора диссертации познакомил С.А. Пихтильков.

**Объектом исследования** в работе являются объекты, применяемые при построении структурной теории: радикалы и центроид Мартиндейла алгебр Ли, а так-

[14]Пихтильков, С.А. Артиновые специальные алгебры Ли / С.А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 2001. – С. 189–194.

[15]Пихтильков, С.А. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / О.А. Пихтилькова, С.А. Пихтильков // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 697–699.

[16]Размыслов, Ю.П. Тождества алгебр и их представления / Ю.П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

[17]Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С.А. Пихтильков. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2013. – 171 с.

же градуированный первичный радикал градуированной $\Omega$-группы.

**Предметом исследования** в работе являются свойства радикалов и центроида Мартиндейла алгебр Ли, удовлетворяющие условиям артиновости и нётеровости, а также свойства первичного радикала градуированной $\Omega$-группы, удовлетворяющей условию конечности.

**Целью настоящей работы** является решение проблем А.В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли и М.В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

В соответствии с поставленной целью сформулированы **задачи исследования**:

— исследовать свойство локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;

— решить проблему А.В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;

— решить проблему М.В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли.

**Научная новизна.** Результаты, полученные в работе, являются новыми.

Доказано, что первичный радикал слабо артиновой алгебры Ли локально нильпотентен. Решена проблема А.В. Михалёва, сформулированная для слабо артиновых алгебр Ли, то есть доказано, что первичный радикал слабо артиновой алгебры Ли разрешим. Для нётеровых алгебр Ли решена проблема М.В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц в следующей редакции: любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли над полем $F$ вложена в матричную алгебру над коммутативным кольцом, которое является прямой суммой полей. Доказано условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли над своим центроидом Мартиндейла. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных $\Omega$-групп.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретическую направленность. Возможность использования полученных теоретических результатов работы в исследованиях, посвящённых изучению объектов структурной теории алгебр Ли и градуированных $\Omega$-групп, является практической значимостью диссертационного исследования.

Теоретические сведения, изложенные и полученные в данной работе, также могут найти применение при проведении лекционных и практических занятий по учебным дисциплинам, изучаемым студентами университетов математических направлений подготовки.

**Методология и методы исследования.** В диссертации использованы методы теории колец и алгебр Ли, универсальных алгебр и градуированных $\Omega$-групп.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Доказана локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли.

2. Для слабо артиновых алгебр Ли решена проблема А.В. Михалёва о разрешимости первичного радикала.

3. Для нётеровых алгебр Ли решена проблема М.В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц в следующей редакции: любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли над полем $F$ вложена в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей.

Доказано условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли над своим центроидом Мартиндейла.

4. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных $\Omega$-групп.

**Достоверность результатов** диссертационного исследования подтверждается аргументированными теоретическими построениями и строго выстроенными доказательствами, которые базируются на методах теории колец и алгебр Ли, универсальных алгебр и градуированных $\Omega$-групп.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации представлены на следующих конференциях:

— Всероссийской научно-практической конференции «Университет XXI века: научное измерение», Тула, Россия, 20–21 мая 2016 г.;

— Международной научно-практической конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвящённая 70-летию В.М. Левчука, Красноярск, Россия, 24–29 июля 2016 г.;

— XIV международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина, Саратов, Россия, 12–15 сентября 2016 г.;

— Шестой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия, 30 января – 6 февраля 2017 г.;

— Всероссийской научно-практической конференции «Университетский комплекс как региональный центр развития образования, науки и культуры», Оренбург, Россия, 1–3 февраля 2017 г.;

— Международной научно-практической конференции «Вопросы современных научных исследований», Омск, Россия, 27 декабря 2018 г.

**Публикации.** Результаты проведенного исследования опубликованы в 11 работах. 4 публикации входят в список изданий, рекомендованных ВАК, 3 из которых – в международную систему цитирования Scopus.

Все опубликованные работы по теме диссертации приведены в конце автореферата.

**Личный вклад автора.** В работе приводятся результаты, которые получены как лично автором, так и в соавторстве. В работах, опубликованных совместно с другими исследователями, общее количество результатов, принадлежащих непосредственно автору, составляет не менее половины.

**Структура и объём диссертации.** Изложение диссертационного исследования проведено в соответствии с общепринятой схемой и включает в себя введение, четыре главы, разбитые на разделы, заключение, список литературы. В конце работы прилагается список использованных обозначений и предметный указатель. Нумерация определений, лемм, предложений и теорем привязана к своему разделу. Весь текст работы занимает 91 страницу. Библиография, приведённая в работе, представляет собой список из 78 источников.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** автором приводится обзор работ, исследований и результатов, ранее проведённых различными авторами и авторскими коллективами, касающихся проблематики диссертационного исследования, описывается методологический аппарат исследования, а также кратко формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

**Первая глава** носит вспомогательный характер и служит для введения основных понятий теории классических радикалов алгебр Ли, систематизации сведений, необходимых для целей настоящего исследования. Рассматриваются основные понятия теории классических радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем будут использоваться в работе при получении основных результатов.

В **разделе 1.1** поясняется термин «классические радикалы», который впервые появился для ассоциативных колец и алгебр. Классическими радикалами для бесконечномерных алгебр Ли будем называть радикалы, отвечающие требованиям создания удовлетворительной структурной теории алгебр Ли. Главным для нашего исследования является первичный радикал алгебр Ли, обозначаемый $P(L)$ (где $L$ – алгебра Ли), так как изучение его свойств позволяет решить проблемы, сформулированные в задачах исследования.

В **разделе 1.2** рассматривается первичный радикал алгебр Ли, приводятся формулировки известных свойств первичного радикала.

Согласно определению, первичный радикал алгебры Ли $L$ равен пересечению первичных идеалов, либо совпадает с самой алгеброй Ли в случае отсутствия первичный идеалов.

В данном разделе построен пример первичной алгебры Ли $L$, которая представляет собой прямую сумму двух простых алгебр Ли $L_1$ и $L_2$, то есть $L = L_1 \oplus L_2$.

В разделе также приводятся известные факты о свойствах первичного радикала, а также разрешимых радикалов алгебр Ли, которые используются при доказательстве свойств локальной нильпотентности и разрешимости первичного радикала алгебры Ли в главе 2 настоящей работы.

В **разделе 1.3** рассматриваются основные понятия и определения, связанные с теорией нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала бесконечномерных алгебр Ли.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является пример построения такой бесконечномерной алгебры Ли, которая представляет собой локально нильпотентную алгебру Ли, то есть такую алгебру Ли, для которой выполняется условие, что любое её конечное множество элементов порождает подалгебру, являющуюся нильпотентной. Данный пример построен с использованием бесконечных верхнетреугольных матриц над полем $F$ характеристики нуль, которые при введении на них операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$ образуют алгебру Ли.

Данный пример демонстрирует естественность введения локально нильпотентного радикала в теории бесконечномерных алгебр Ли. В частности, в качестве примера такого введения локально нильпотентного радикала приводится известное его определение для специальных алгебр Ли над полем $F$, в котором используется понятие $PI$-представлений алгебр Ли над полем $F$ и их наибольших идеалов локальной нильпотентности.

**Раздел 1.4** посвящён истории проблематики введения определения радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли и проблемы его гомологического описания.

Рассмотрение существующих в теории алгебр Ли определений радикала Джекобсона и связанных с ним естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, таких как неприводимо представленный радикал, $PI$-неприводимо представленный радикал и конечно неприводимо представленный радикал, позволило в заключении данной работы сформулировать новые проблемы и вопросы, которые могут составить основу для дальнейших исследований свойств радикалов бесконечномерных алгебр Ли.

Во **второй главе** рассматриваются слабо артиновы алгебры Ли и решаются проблемы, поставленные в задачах исследования, связанные со свойствами первичного радикала алгебр Ли. В процессе доказательства основных результатов данной главы используются нижний слабо разрешимый радикал и его соотношение с первичным радикалом, представление первичного радикала алгебр Ли по нильпотентным идеалам, а также свойства абелевых, нильпотентных и разрешимых идеалов алгебр Ли.

В **разделе 2.1** приводятся определение слабо артиновой алгебры Ли и примеры бесконечномерных слабо артиновых алгебр Ли.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является пример построения бесконечномерной слабо артиновой алгебры Ли. Алгебра Ли $L$ строится как полупрямое произведение алгебр $M$ и $P$, то есть $L = M \odot P$, где $M$ является простой алгеброй Ли, а $P$ представляет собой прямую сумму векторных пространств $M_i, i = 1, 2, ...$, которые являются алгебрами Ли, изоморфными $M$, то есть $P = M_1 \dotplus M_2 \dotplus ... \dotplus M_n \dotplus ...$ . На $P$ задается операция таким образом, чтобы $P$ являлась алгеброй Ли. Доказывается, что построенная алгебра является слабо артиновой.

В **разделе 2.2** главным результатом является доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли, которое решает первую из задач, поставленных в настоящем диссертационном исследовании.

**Теорема 1** *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли $L$ является локально нильпотентным.*

При получении данного результата основными конструкциями, используемыми в логической цепи умозаключений, стали представление первичного радикала алгебры Ли в качестве радикала, являющегося нижним слабо разрешимым, и представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Согласно определению свойства локальной нильпотентности алгебр Ли любое конечное множество элементов алгебры Ли $L$ должно порождать в ней нильпотентную подалгебру, что и положено в основу доказательства теоремы 1 для первичного радикала $P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли $L$.

В **разделе 2.3** представлено решение проблемы о разрешимости первичного радикала, сформулированной А.В. Михалёвым для слабо артиновых алгебр Ли, и поставленной в качестве второй задачи настоящего исследования.

Основным результатом раздела 2.3 является формулировка и доказательство теоремы, согласно которой для слабо артиновой алгебры Ли её первичный радикал разрешим.

**Теорема 2** *Первичный радикал $P(L)$ любой слабо артиновой алгебры Ли $L$ является разрешимым.*

В рассуждениях, приводящих к получению подтверждения истинности приведённой теоремы, использовались представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала и представление первичного радикала по нильпотентным идеалам, а также свойства идеалов и нильпотентных идеалов алгебр Ли.

Основную идею получения результата можно разбить несколько этапов:

1. Рассматривается производный ряд первичного радикала $P = P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли $L$. Используя условие слабой артиновости, получаем следующие соотношения:

$$R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)} \text{ и } [R_1, R_1] = R_1.$$

В предположении, что $R_1 \neq 0$, доказывается неразрешимость последнего несобственного идеала $K = R_m$ убывающей цепи ненулевых идеалов, построенной на основе производных рядов первичного радикала $P = P(L)$ и собственных неразрешимых идеалов, содержащихся в идеалах из стабилизирующейся цепи.

2. Рассматривается представление первичного радикала $P = P(L)$ слабо артиновой алгебры Ли $L$ как нижнего слабо разрешимого радикала, из которого следует, что $P(L) = \tau(\beta)$.

3. Показывается, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = \tau(\omega)$ занумерован первым бесконечным порядковым числом.

4. Строится представление первичного радикала по нильпотентным идеалам: $P(L) = \rho(\beta)$.

Идеал $K$, полученный в пункте 1, представляется в виде объединения нильпотентных идеалов, являющихся элементами возрастающей цепи идеалов, то есть $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

5. С помощью элементов идеала $K$ получаем выполнение тождеств разрешимости для первичного радикала $P = P(L)$.

**В третьей главе** решается проблема М.В. Зайцева, поставленная в качестве третьей задачи данного исследования. Она связана с проблемой вложения специальной нётеровой алгебры Ли в алгебру матриц. В процессе получения основных результатов главы используется конструкция центроида Мартиндейла.

**В разделе 3.1** изложены необходимые для получения основных результатов определение нётеровой алгебры Ли и понятие размерности пространства над прямой суммой полей.

Сформулирована и доказана лемма о совпадении размерностей $C$-подпростанств, являющихся вложенными друг в друга подпростанствами $C$-подпространства, получающегося как тензорное произведение конечномерного пространства над полем $F$ и прямой суммы полей.

**В разделе 3.2** рассматриваются основные понятия и результаты, необходимые для решения проблемы М.В. Зайцева, связанные с конструкцией центроида Мартиндейла.

Доказана следующая теорема о конечномерности первичной $PI$-алгебры.

**Теорема 3** *Пусть $A$ – первичная ассоциативная $PI$-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени $d$. Тогда $A$ конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и ее размерность над $C$ меньше, либо равна $[d/2]^2$.*

Для первичной специальной алгебры Ли сформулирована и доказана следующая теорема.

**Теорема 4** *Пусть $L$ – первичная специальная алгебра Ли. Тогда*

*1) $L$ является матричной алгеброй Ли;*

*2) если сложность $n(L)$ равна $n$, то $L$ конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше $n^2$.*

Теорема 4 определяет условие конечномерности первичной специальной алгебры Ли $L$ над своим центроидом Мартиндейла.

**В разделе 3.3** сформулирован и доказан основной результат главы 3, заключающийся в решении проблемы М.В. Зайцева о вложении любой нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

Следующая теорема дает решение проблемы М.В. Зайцева в редакции, согласно которой любая полупервичная нётерова специальная алгебра Ли вкладывается в матричную алгебру над коммутативным кольцом.

**Теорема 5** *Пусть алгебра Ли $L$ – нётерова полупервичная специальная. Тогда $L$ вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где $C$ – прямая сумма полей.*

**В четвёртой главе** приведены результаты исследования первичного радикала градуированных $\Omega$-групп, полученные в качестве дополнительных результатов к задачам, поставленным в данной работе.

**В разделе 4.1** рассмотрены основные определения и сведения о градуированных $\Omega$-группах.

**В разделе 4.2** сформулирован и доказан основной результат главы 4, заключающийся в доказательстве свойства локальной нильпотентности градуированного идеала градуированной $\Omega$-группы, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек градуированных идеалов.

В процессе исследования свойства локальной нильпотентности градуированного идеала градуированной $\Omega$-группы сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Первое утверждение связано с существованием ненулевого абелева градуированного идеала в градуированном идеале. Согласно лемме, доказанной в настоящей работе, любой ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной $\Omega$-группы содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

Второе утверждение о сумме градуированных идеалов градуированной $\Omega$-группы сформулировано в виде леммы, с помощью которой установлено, что при суммировании нильпотентных градуированных идеалов свойство нильпотентности сохраняется.

Основным результатом, полученным в данном разделе, является теорема, формулировка которой приведена далее.

**Теорема 6** *Градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной $\Omega$-группы $A$ с условием конечности, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей градуированных идеалов, является локально нильпотентным.*

При получении данного результата основными конструкциями, используемыми в логической цепи умозаключений, стали представление градуированного первичного радикала градуированной $\Omega$-группы как нижнего слабо разрешимого градуированного радикала и представление первичного градуированного радикала градуированной $\Omega$-группы по её нильпотентным градуированным идеалам.

Согласно определению свойства локальной нильпотентности градуированных $\Omega$-групп любое конечное множество элементов градуированной $\Omega$-группы $A$ должно порождать в ней нильпотентную градуированную $\Omega$-подгруппу, что и доказывается в теореме 6 применительно к градуированному первичному радикалу $P(A)$.

**В заключении** диссертации приведены выводы по полученным результатам проведенного исследования, а также сформулированы новые научные проблемы теории радикалов бесконечномерных алгебр Ли.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования, основная цель которого – решение проблем А.В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли и М.В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц. Основные задачи исследования решены. Получены следующие результаты:

1 **Задача.** Исследовать свойство локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

**Результат.** Доказано, что первичный первичного радикал слабо артиновой алгебры Ли локально нильпотентен.

2 **Задача.** Решить проблему А.В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

**Результат.** Доказано, что первичный первичного радикал слабо артиновой алгебры Ли разрешим.

3 **Задача.** Решить проблему М.В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли.

**Результат.** Доказано, что любая нётерова полупервичная специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей.

Также в ходе исследования получен следующий **результат**, который соотносится с основными задачами исследования: градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной $\Omega$-группы с условием конечности, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек градуированных идеалов, локально нильпотентен.

*Автор выражает глубокую признательность и благодарность за поддержку и постоянное внимание к работе кандидату физико-математических наук, доценту Ольге Александровне Пихтильковой.*

# СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1 Благовисная, А.Н. О проблеме М.В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли / А.Н. Благовисная, О.А. Пихтилькова, С.А. Пихтильков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.

2 Пихтильков, С.А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 1 (61). – С. 134–142.

3 Благовисная, А.Н. Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли / А.Н. Благовисная // Чебышевский сборник. – 2019. – № 1(69). – С. 311-351.

**Публикация в рецензируемом издании, входящем в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus**

4 Blagovisnaya, A.N. On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras / A.N. Blagovisnaya, O.A. Pikhtilkova, S.A. Pikhtilkov // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2018. – Vol. 233. – Issue 5. – С. 635–639.

**Публикации в прочих изданиях**

5 Blagovisnaya, A. A prime radical of weakly artinian Ω-groups with finite condition is locally nilpotent / A. Blagovisnaya, S. Pikhtilkov, O. Pikhtilkova // Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 2015. – Vol. 9. – Iss. 2.

6 Pikhtilkov, S.A. On the embeddabillity of Noetherian semiprime special Lie algebra in $sl_m(F) \otimes_F C$ / S.A. Pikhtilkov, O.A. Pikhtilkova, A.N. Blagovisnaya // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию В.М. Левчука. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. – P. 110–111.

7 Пихтильков, С.А. О локальной нильпотентности первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С.А. Пихтильков, А.Н. Благовисная, О.А. Пихтилькова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Вып. 8: Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина (Саратов, 12-15 сентября 2016 г.). – 2016. – С. 121–122.

8 Пихтильков, С.А. О разрешимости первичного радикала слабоартиновых алгебр Ли / С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная // Университет XXI века: научное измерение: материалы Всероссийской конференции. – Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2016. – С. 134–136.

9 Пихтильков, С.А. О различных радикалах алгебр Ли / С.А. Пихтильков, А.Н. Благовисная, А.Н. Павленко // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы Всероссийской научно-методической конференции. – Оренбург: ОГУ, 2017. – С. 3174–3177.

10 Пихтильков, С.А. Разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тезисы докладов 6-й школы-конференции. – Москва: МЦНМО, 2017. – С. 65–67.

11 Благовисная, А.Н. О примерах построения артиновых алгебр Ли / А.Н. Благовисная, А А. Горелик, О.А. Пихтилькова // Вестник современных исследований: материалы международной практической конференции «Вопросы современных научных исследований» (Омск, декабрь 2018 г.). – 2018. – № 12.14 (27). – С. 65–67.