



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2020, № 2, с. 41-54.

Поступила: 25.10.2020

Окончательный вариант: 28.11.2020

© УлГУ

УДК 519.6

## Задача поиска оптимальных траекторий для управляемой популяционной модели, учитывающей конкуренцию и миграцию

Петров А.А.<sup>1,\*</sup>, Дружинина О.В.<sup>2</sup>,  
Масина О.Н.<sup>1</sup>, Щербаков А.В.<sup>1</sup>

\*[xeal91@yandex.ru](mailto:xeal91@yandex.ru)

<sup>1</sup>ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, Россия

<sup>2</sup>ФИЦ ИУ РАН, ИПУ РАН, Москва, Россия

---

Изучена трехмерная управляемая модель популяционной динамики с учетом конкуренции и миграции. Критерий качества управления для указанной модели рассмотрен в рамках задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Компьютерное исследование нелинейной модели с конкуренцией и миграцией позволило получить результаты численных экспериментов по поиску законов управления, критерия качества управления и оптимальных траекторий. Для решения задач оптимального управления использованы алгоритмы символьных вычислений. Указанные алгоритмы основаны на использовании эвристических методов численной оптимизации в сочетании с методами генерации функций управления. Проведен сравнительный анализ результатов для различных степеней полиномов, в виде которых осуществляется поиск функций управления. В качестве инструментального средства решения задачи оптимального управления и исследования модели использован программный комплекс, разработанный с помощью библиотек языка Python.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, оптимальное управление, модели популяционной динамики, критерий качества управления, численные методы оптимизации, алгоритмы символьных вычислений, компьютерные эксперименты.

---

### Введение

Математические популяционные модели, учитывающие конкуренцию и миграцию, используются в задачах анализа и прогнозирования динамики взаимодействующих сообществ, в частности, в задачах динамики численности населения и задач оптимизации промысла. Качественные свойства траекторий и эффекты влияния миграционных потоков

рассматривались в [1–5] в других работах. Базовый подход к анализу стохастических популяционных моделей описан в [6]. В [7] выполнено исследование устойчивости стационарных состояний трехмерных моделей с учетом воздействия широкополосных параметрических и аддитивных шумов. Для трехмерных неуправляемых моделей с конкуренцией и миграцией в [8] получен ряд результатов исследования траекторий в детерминированном и стохастическом случаях.

Теоретический и прикладной интерес представляет исследование динамических популяционных моделей с управлением, причем исследования в этом направлении требуют расширения и углубления понятийной базы и методов. Построение и анализ некоторых типов популяционных моделей с управлением проводились в [9–11] и в других работах. В [9] поставлена задача оптимального управления в популяционной модели, представленной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем цель управления состоит в неограниченно долгом сохранении одного из взаимодействующих видов. В рамках решения указанной задачи получены необходимые и достаточные условия для ограничений на управление, при которых функционал качества достигает абсолютного максимума. В [10] дана формализация критерия оптимальности для систем авторепродукции и рассмотрена задача оптимального управления для анализа эволюционно устойчивого поведения. В [11] поставлена задача оптимального поведения двухвидовой популяции в ареале с учетом миграции и определены равновесия, соответствующие оптимальному поведению популяций (в смысле максимизации скоростей роста).

Поскольку управляемые популяционные модели с миграционными потоками и с различными типами межвидовых взаимодействий обладают сложной структурой и при их анализе часто возникают трудности различного характера, актуальной проблемой является адаптация к этим моделям численных методов, а также создание алгоритмов и программ глобальной параметрической оптимизации [12, 13]. Среди особенностей задач глобальной параметрической оптимизации можно отметить высокую размерность пространства поиска, сложный ландшафт и высокую вычислительную сложность целевых функций. Для решения указанных задач достаточно эффективны инспирированные природой алгоритмы, такие как алгоритмы, базирующиеся на нейронных сетях, и популяционные алгоритмы. К популяционным алгоритмам относится широкий класс алгоритмов, включающий в себя: эволюционные алгоритмы (генетические алгоритмы, эволюционные стратегии, дифференциальная эволюция); бионические алгоритмы (рой частиц, муравьиная колония, пчелиная колония, стая волков, алгоритм кукушки); алгоритмы, инспирированные неживой природой (гравитационный поиск); алгоритмы, инспирированные человеческим обществом (алгоритм эволюции разума, гармонический поиск). Кроме того, используются миграционный алгоритм, рассеянный поиск и другие алгоритмы. Преимущества популяционных алгоритмов состоят в простоте реализации, в естественном распараллеливании, в наличии свободных параметров, а также в высокой вероятности локализации субоптимальных решений.

Методы глобальной параметрической оптимизации в [14] применены к исследованию управляемых популяционных моделей с миграцией и с трофическими цепями. В частности, в указанной работе рассмотрена задача оптимального управления для трехмерной модели с учетом особенностей трофических цепей и на основе алгоритма Пауэлла получены оптимальные траектории для выбранных наборов параметров.

В настоящей работе рассмотрена трехмерная модель динамики численности взаимосвязанных сообществ с учетом миграции и конкуренции. Предложен алгоритм решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Выполнен поиск законов управления, критерия качества управления и оптимальных траекторий. Для решения задачи оптимального управления использованы численные методы оптимизации и алгоритмы символьных вычислений. По результатам серии компьютерных экспериментов проведено сравнение возможностей метода дифференциальной эволюции и алгоритма Пауэлла. В качестве инструментального средства решения задачи оптимального управления и исследования модели использован программный комплекс численной оптимизации, при разработке которого использован язык Python [15, 16].

## 1. Оптимальное управление в трехмерной модели с конкуренцией и миграцией

Рассматривается трехмерная управляемая модель с учетом конкуренции и миграционных потоков, которая описывает динамику двух взаимосвязанных сообществ, причем первый вид мигрирует в другой ареал, а в первом ареале конкурирует со вторым видом. Изучаемая модель задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 - p_{11} x_1^2 - p_{13} x_1 x_3 + \beta x_2 - \gamma x_1 - u_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - p_{22} x_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2 - u_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 - p_{33} x_3^2 - p_{13} x_1 x_3 - u_3 x_3,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $u_i = u_i(t)$  – управляющие функции. В (1) приняты следующие обозначения:  $x_1$  и  $x_3$  – плотности популяций конкурирующих видов в первом ареале,  $x_2$  – плотность популяции во втором ареале,  $p_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – коэффициенты межвидовой конкуренции,  $p_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты внутривидовой конкуренции,  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты естественного прироста,  $\beta, \gamma$  – коэффициенты миграции вида между двумя ареалами, при этом второй ареал является убежищем. Качественное исследование (включая устойчивость стационарных состояний) и численное исследование детерминированной модели (1) без управления и ее стохастического обобщения проводились в [7, 8]. Модификации модели (1) с учетом конкуренции, мутуализма и миграции рассматривались в [17]. В задачах динамики популяций естественными являются требования вида  $x_i(t) \geq 0$ . Ограничения для модели (1) зададим в виде

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}, x_1(T) = x_{11}, x_2(T) = x_{21}, x_3(T) = x_{31}, t \in [0, T],\tag{2}$$

$$0 \leq u_1 \leq u_{11}, 0 \leq u_2 \leq u_{21}, 0 \leq u_3 \leq u_{31}, t \in [0, T]. \quad (3)$$

Применительно к задаче (1)–(3) функционал, подлежащий максимизации, записывается в виде

$$J(u) = \int_0^T [(l_1 x_1 - c_1)u_1(t) + (l_2 x_2 - c_2)u_2(t) + (l_3 x_3 - c_3)u_3(t)] dt. \quad (4)$$

Критерий качества управления (5) соответствует максимальной прибыли от использования популяций, причем  $l_i$  – стоимость  $i$ -й популяции,  $c_i$  – стоимость технических средств, соответствующих  $i$ -й популяции.

Задачу оптимального управления для модели (1) можно сформулировать следующим образом: найти максимум функционала (4) при условиях (2), (3).

## 2. Алгоритмы решения задачи параметрической оптимизации

Для нахождения максимума функционала (4) предлагается использование численных методов оптимизации с использованием алгоритмов символьных вычислений для нахождения функций управления  $u_i(t)$ .

*Алгоритм поиска оптимальных траекторий* (основной алгоритм, или алгоритм 1) содержит следующие этапы.

1. Генерация функций управления.
2. Построение траекторий движения модели (1).
3. Поиск численного значения критерия (4).
4. Проверка условия останова. Если условие останова достигнуто, алгоритм завершается. В противном случае осуществляется переход к этапу 1.

Для решения задач глобальной параметрической оптимизации с применением основного алгоритма разработан комплекс компьютерных программ на языке Python. В частности, комплекс позволяет генерировать функции управления с применением метода символьной регрессии. Этот метод заключается в представлении выражений в виде дерева, узлами которого являются арифметические операции либо математические функции. В рамках комплекса возможна реализация следующих вспомогательных алгоритмов.

*Арифметическое кодирование* (алгоритм 2). Данный алгоритм применяется в энтропийном сжатии информации и позволяет преобразовывать вещественные числа (от 0 до 1) в последовательность символов какого-либо алфавита, а также позволяет управлять вероятностью появления символа в сообщении.

*Генератор узлов на основе конечного автомата* (алгоритм 3). Конечный автомат для генерации узлов символьного дерева можно представить в виде циклического направленного графа, условия переходов для которого последовательно считываются из символьного сообщения (алфавит «abcd»). На каждом из узлов автомат возвращает операцию, оператор, переменную или число.

*Алгоритм построения деревьев на основе связных списков* (алгоритм 4). Указанный алгоритм позволяет сгенерировать символьное выражение, получить его текстовое пред-

ставление, произвести преобразование путем подстановки аргумента  $x$ . Принцип работы алгоритма основан на динамическом построении связного списка путем рекурсивной подстановки узлов.

*Алгоритм генерации сообщения* (алгоритм 5). Работой этого алгоритма завершается генерация функций управления на основе символьных деревьев. При реализации алгоритма 5 используются эвристические алгоритмы численной оптимизации в сочетании с алгоритмами 2–4. Процесс кодирования символьного дерева заключается в нахождении числа  $\delta \in [0,1]$ .

С использованием алгоритмов 2–5 возможно нахождение функций управления  $u_i(t)$  для функционала (4) в символьном виде. Следует отметить, что описанные алгоритмы могут быть использованы для решения широкого класса задач поиска неизвестных функций, а также задач устойчивости, управления, прогнозирования и кластеризации. Процесс кодирования символьного дерева, являющегося универсальным аппроксиматором, аналогичен подбору весовых коэффициентов нейросети. В связи с этим символьные деревья могут быть использованы для построения искусственных нейронов (при использовании нескольких переменных), а также для конструирования функций активации для выходного слоя. Алгоритмы 2–5 планируется использовать в дальнейшем для комбинированного сложного поиска функций управления как для модели (1), так и для других динамических моделей.

В настоящей работе рассматривается частный случай реализации алгоритма 1. В качестве управляющих функций рассматриваются положительные полиномы  $n$ -й степени,  $n = 0, 1, 2, 3$ . В ходе разработки программ на языке Python для решения задачи поиска оптимальных траекторий использованы два алгоритма оптимизации нулевого порядка из состава библиотеки SciPy – алгоритм Пауэлла (локальный детерминированный алгоритм) и алгоритм дифференциальной эволюции (глобальный стохастический алгоритм). Задачу максимизации функционала (4) можно свести к задаче:

$$\|(\delta, e^{-J})\| \rightarrow \min,$$

где  $\delta$  – абсолютное отклонение траекторий от  $x_{11}, x_{21}, x_{31}$ , а через  $e^{-J}$  обозначена обратная экспонента, отвечающая функционалу (4).

Управляющие функции имеют вид

$$u_i(t) = \|R_i T\|, \quad R_i = (r_0, r_1, \dots, r_n), \quad T = (t^0, t^1, \dots, t^n)^T,$$

где  $R_i$  – параметрические коэффициенты,  $t$  – время,  $n$  – степень полинома,  $\|\cdot\|$  – декартова норма вектора. Далее поиск оптимальных траекторий выполняется с учетом допущения, что управляющие функции представляют собой полиномы различных степеней с коэффициентами, подлежащими вычислению.

### 3. Результаты компьютерных экспериментов

На основе применения адаптированных к модели (1) алгоритмов численной оптимизации проведена серия компьютерных экспериментов. На рис. 1 приводится набор параметров для модели (1), а также начальные и граничные условия для поиска законов оптимального управления  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $n = 0, n = 1, n = 2$  и  $n = 3$ .

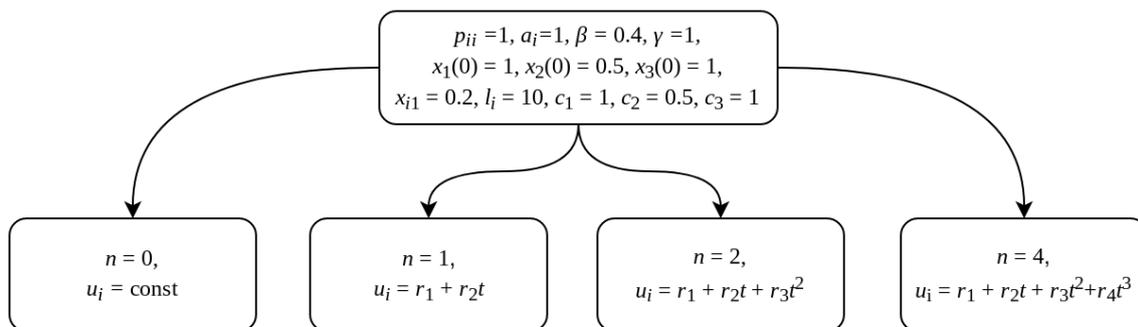


Рис. 1. Набор параметров модели (1), начальные и граничные условия для поиска законов оптимального управления  $u_i$  при  $n = 0, n = 1, n = 2$  и  $n = 3$

Результаты экспериментов по поиску законов управления и критерия качества управления с применением алгоритма Пауэлла приведены в таблице 1. Отметим, что для всех результатов абсолютная погрешность по соблюдению граничных условий составляет  $\|\sigma\| < 0.01$ , а время вычислений варьируется от 12 секунд ( $n = 1$ ) до 14 минут ( $n = 3$ ).

Таблица 1. Результаты поиска законов управления  $u_i$  и критерия качества управления  $J(u)$  с использованием алгоритма Пауэлла

Степень полинома	$u_i(t), i = 1, 2, 3, J(u)$
$n = 1$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t, \quad i = 1, 2, 3,$ $r_{01} = 0.52866253, r_{11} = -0.04927972, r_{02} = -0.21647657,$ $r_{12} = -0.13352656, r_{03} = 0.66808207, r_{13} = -0.01093626;$ $J(u) = 46.57$
$n = 2$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t + r_{2i}t^2, \quad i = 1, 2, 3,$ $r_{01} = -0.54295917, r_{11} = 0.08043992, r_{21} = 0.00126864,$ $r_{02} = 1.14936551, r_{12} = -0.35249694, r_{22} = 0.04373466,$ $r_{03} = 0.8862529, r_{13} = -0.09851022, r_{23} = 0.00590944;$ $J(u) = 51.04$
$n = 3$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t + r_{2i}t^2 + r_{3i}t^3, \quad i = 1, 2, 3,$

	$r_{01} = 6.47954135 * 10^{-1}, r_{11} = -1.30991035 * 10^{-1}, r_{21} = 4.29057081 * 10^{-3},$ $r_{31} = -6.24339937 * 10^{-5}, r_{02} = -5.07690639 * 10^{-2}, r_{12} = -1.34917927 * 10^{-1},$ $r_{22} = -1.52717400 * 10^{-3}, r_{32} = -2.02805284 * 10^{-4}, r_{03} = 6.72311624 * 10^{-1},$ $r_{13} = -1.00075364 * 10^{-3}, r_{23} = 1.95392647 * 10^{-4}, r_{33} = -3.61808567 * 10^{-4};$ $J(u) = 47.64$
--	--

Результаты экспериментов по поиску законов управления и критерия качества управления с применением алгоритма дифференциальной эволюции приведены в таблице 2. Отметим, что для всех результатов абсолютная погрешность по соблюдению граничных условий составляет  $\|\sigma\| < 0.01$ , а время вычислений варьируется от 35 секунд ( $n = 1$ ) до 32 минут ( $n = 3$ ).

**Таблица 2. Результаты поиска законов управления  $u_i$  и критерия качества управления  $J(u)$  с использованием алгоритма дифференциальной эволюции**

Степень полинома	$u_i(t), i = 1, 2, 3, J(u)$
$n = 1$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t, i = 1, 2, 3,$ $r_{01} = -0.6421057, r_{11} = 0.1018308, r_{02} = 1.34819927,$ $r_{12} = -0.32619485, r_{03} = 0.77971988, r_{13} = -0.03832249;$ $J(u) = 49.77$
$n = 2$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t + r_{2i}t^2, i = 1, 2, 3,$ $r_{01} = -0.6400909, r_{11} = 0.34615248, r_{21} = -0.03416042,$ $r_{02} = 0.56310673, r_{12} = 0.33617098, r_{22} = -0.06290762,$ $r_{03} = -2.2667194, r_{13} = 1.01365024, r_{23} = -0.09084214;$ $J(u) = 52.90$
$n = 3$	$u_i(t) = r_{0i} + r_{1i}t + r_{2i}t^2 + r_{3i}t^3, i = 1, 2, 3,$ $r_{01} = -0.84706922, r_{11} = 0.73445232, r_{21} = -0.17872257,$ $r_{31} = 0.01181929, r_{02} = 1.72012003, r_{12} = -2.73440324,$ $r_{22} = 0.71576838, r_{32} = -0.04912169, r_{03} = -1.89021861,$ $r_{13} = 1.83388912, r_{23} = -0.44678566, r_{33} = 0.03039091;$ $J(u) = 52.19$

Вычислительные эксперименты были проведены также для простейшего случая  $n = 0$ , что соответствует условиям  $u_i = \text{const}$ . В этом случае получены практически совпадающие значения параметрических коэффициентов и критерия качества, и соответственно совпадающие по конфигурации оптимальные траектории модели (1). Согласно результатам, представленным в таблице 1 и таблице 2, можно отметить, что алгоритм Пауэлла сходится к меньшим значениям коэффициентов для высоких степеней  $t$ , что снижает влияние нелинейных компонент полинома на управление.

На рис. 2 представлены траектории модели (1) для  $n = 1$  с использованием алгоритма Пауэлла.

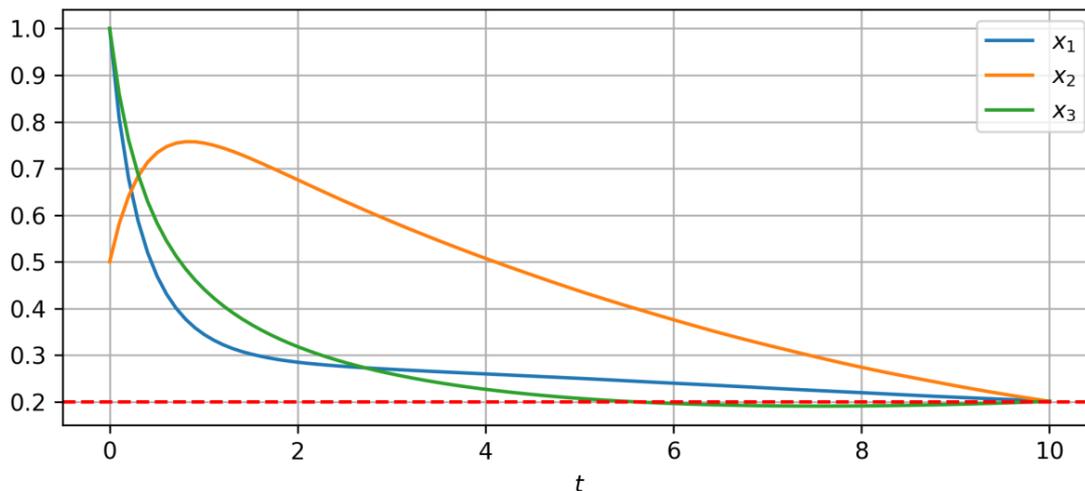


Рис. 2. Траектории системы (1) для  $R_1(0.52866253, -0.04927972)$ ,  $R_2(-0.21647657, -0.13352656)$ ,  $R_3(0.66808207, -0.01093626)$  с использованием алгоритма Пауэлла

На рис. 3 представлены результаты построения траекторий системы (1) для  $n = 1$  с использованием дифференциальной эволюции.

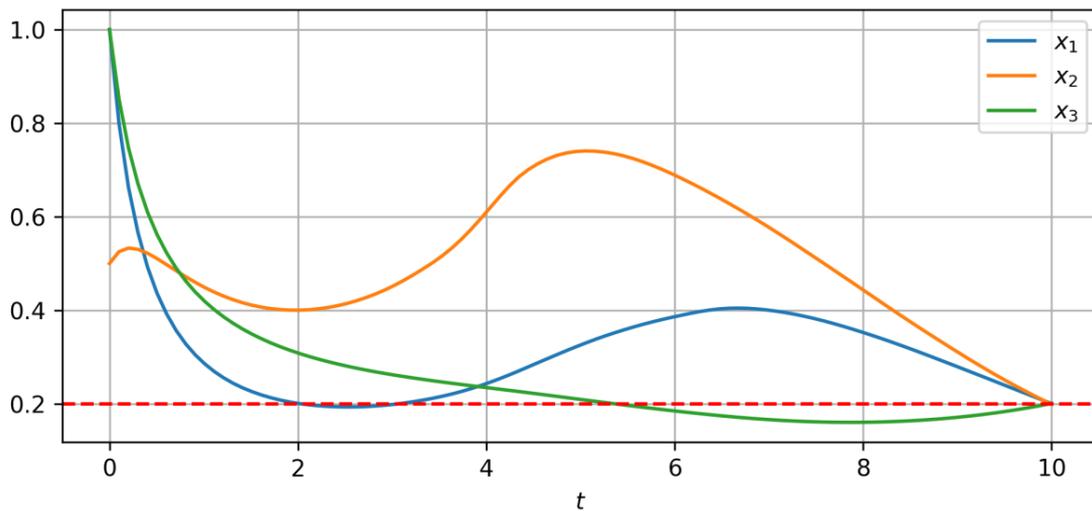


Рис. 3. Траектории системы (1) для  $R_1(-0.6421057, 0.1018308)$ ,  $R_2(1.34819927, -0.32619485)$ ,  $R_3(0.77971988, -0.03832249)$  с использованием дифференциальной эволюции

Согласно рис. 3, следует отметить, что характер траекторий значительно изменился по сравнению с алгоритмом Пауэлла. Кроме того, возросло значение функционала (4), что

свидетельствует о более высокой эффективности алгоритма дифференциальной эволюции для случая  $n = 1$ .

На рис. 4 представлены траектории модели (1) для  $n = 2$  с использованием алгоритма Пауэлла.

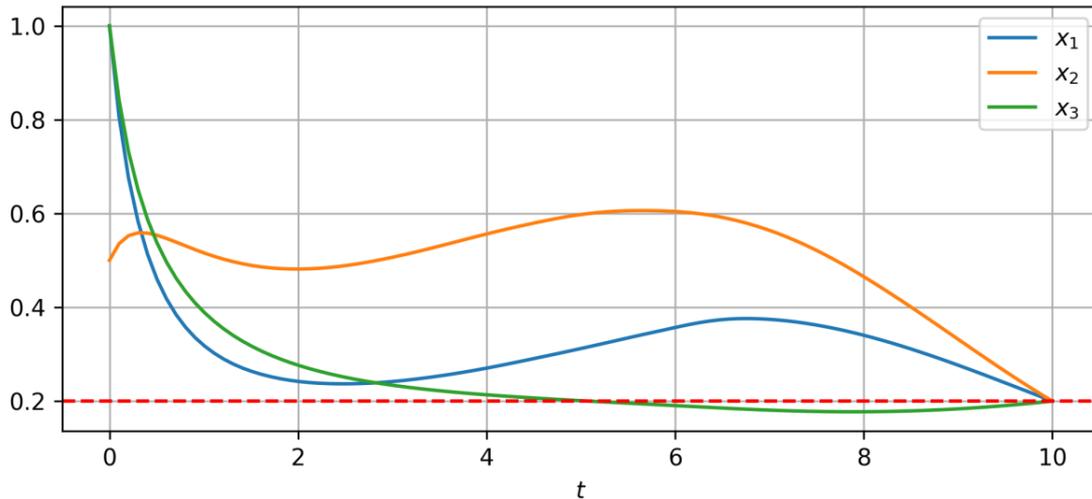


Рис. 4. Траектории системы (1) для  $R_1(-0.54295917, 0.08043992, 0.00126864)$ ,  $R_2(1.14936551, -0.35249694, 0.04373466)$ ,  $R_3(0.8862529, -0.09851022, 0.00590944)$  с использованием алгоритма Пауэлла

На рис. 5 представлены результаты построения траекторий системы (1) для  $n = 2$  с использованием алгоритма дифференциальной эволюции.

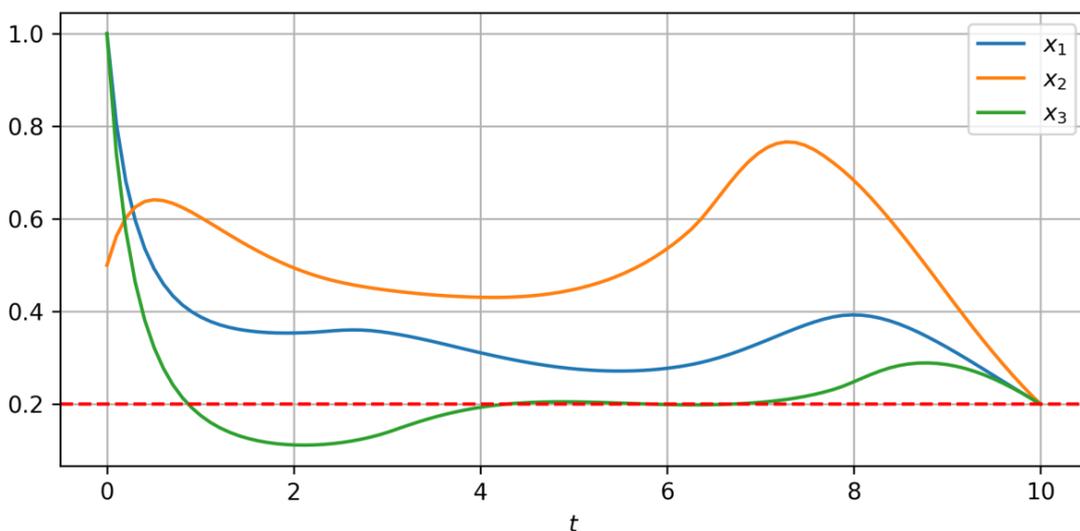


Рис. 5. Траектории системы (1) для  $R_1(-0.6400909, 0.34615248, -0.03416042)$ ,  $R_2(0.56310673, 0.33617098, -0.06290762)$ ,  $R_3(-2.2667194, 1.01365024, -0.09084214)$  с использованием дифференциальной эволюции

Следует отметить, что траектории на рис. 4 и на рис. 5 существенно различаются. Преимущество алгоритма дифференциальной эволюции в большем значении  $J(u)$  сохраняется также и для  $n=2$ . Согласно полученным результатам, использование квадратичных функций управления по сравнению с линейными позволяет существенно увеличить значение функционала (4).

Далее рассмотрим траектории, полученные с применением кубических функций управления. На рис. 6 представлены траектории модели (1) для  $n=3$  с использованием алгоритма Пауэлла.

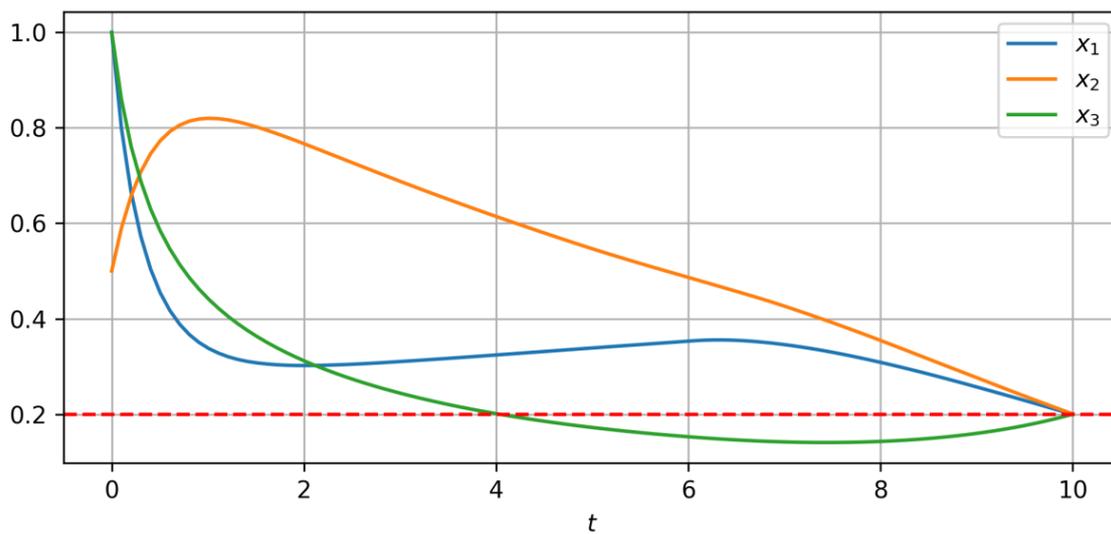


Рис. 6. Траектории системы (1) для

$$R_1(6.47954135 * 10^{-1}, -1.30991035 * 10^{-1}, 4.29057081 * 10^{-3}, -6.24339937 * 10^{-5}),$$

$$R_2(-5.07690639 * 10^{-2}, -1.34917927 * 10^{-1}, -1.52717400 * 10^{-3}, -2.02805284 * 10^{-4}),$$

$$R_3(6.72311624 * 10^{-1}, -1.00075364 * 10^{-3}, 1.95392647 * 10^{-4}, -3.61808567 * 10^{-4})$$

с использованием алгоритма Пауэлла

На рис. 7 представлены результаты построения траекторий системы (1) для  $n=3$  с использованием алгоритма дифференциальной эволюции. Следует отметить, что при  $n=3$  наблюдается значительное уменьшение значения критерия качества  $J(u)$  для алгоритма Пауэлла, а также незначительное уменьшение значения критерия качества  $J(u)$  для алгоритма дифференциальной эволюции.

На рис. 2–7 можно проследить взаимное влияние плотностей и влияние вида функций управления популяций  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Эффекты влияния наглядно прослеживаются для  $n \geq 2$ , поскольку многомодальные функции управления  $u_i(t)$  могут приводить к взаимоосциллирующему характеру некоторых траекторий (см. траектории, соответствующие  $x_2$  и  $x_3$ , на рис. 7). Тем не менее, конкретный вид траектории зависит от вида соответствующей функции управления, поскольку управление может компенсировать влияние плотностей

других популяций (см. траекторию, соответствующую  $x_1$ , на рис. 7). В целом, согласно различному виду траекторий на рис. 2–7, можно сделать вывод о существенном влиянии управления на качественное поведение системы (1).

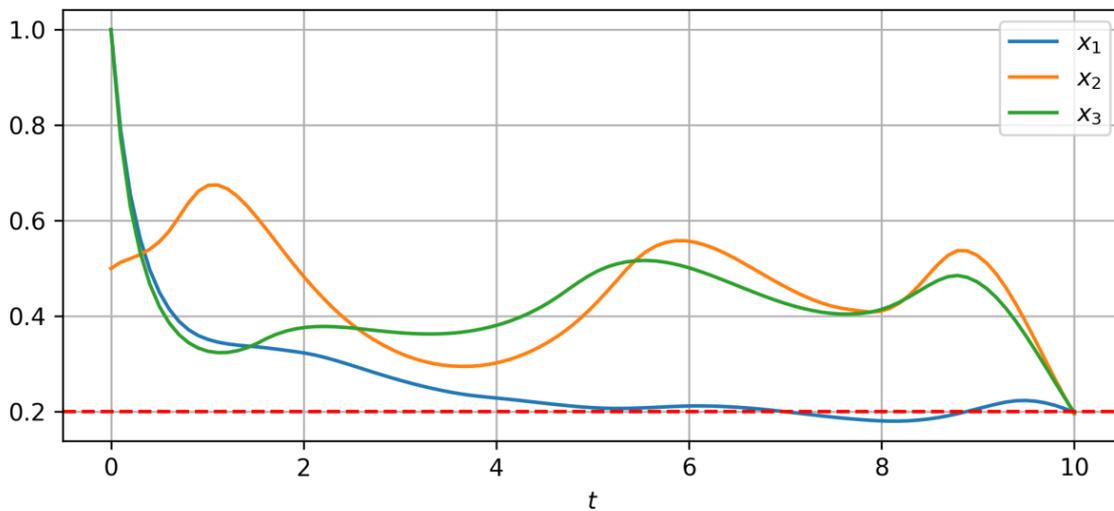


Рис. 7. Траектории системы (1) для  $R_1(-0.84706922, 0.73445232, -0.17872257, 0.01181929)$ ,  
 $R_2(1.72012003, -2.73440324, 0.71576838, -0.04912169)$ ,  
 $R_3(-1.89021861, 1.83388912, -0.44678566, 0.03039091)$  с использованием алгоритма дифференциальной эволюции

В результате сравнительного анализа полученных с помощью алгоритма Пауэлла и представленных на рис. 2, 4, 6 траекторий системы (1) получено, что 1) вид функции управления слабо влияет на плотность  $x_3$  популяции с межвидовой конкуренцией без миграции; 2) вид функции управления существенно влияет на плотность  $x_1$  части популяции с межвидовой конкуренцией и миграцией; 3) при  $n = 1$  и  $n = 3$  пики плотности  $x_2$  части популяции с миграцией без конкуренции имеют близкие значения, при этом характер траектории, соответствующей популяции с плотностью  $x_2$ , существенно отличается от характера траекторий при  $n = 2$ .

В результате сравнительного анализа полученных с помощью алгоритма дифференциальной эволюции и представленных на рис. 1, 3, 5 траекторий системы (1) получено, что 1) вид функции управления во всех трех случаях (при  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ) значительно влияет на плотности  $x_1, x_2, x_3$ ; 2) при  $n = 3$  характер траектории, отвечающей плотности  $x_1$  части популяции с межвидовой конкуренцией и миграцией, носит менее волнообразный характер, чем при  $n = 1$  и  $n = 2$ , при этом плотность  $x_1$  уменьшается; 3) при  $n = 1$  и  $n = 2$  пики плотностей  $x_2$  имеют близкие значения; 4) более благоприятные условия существования популяции с плотностью  $x_3$  при наличии межвидовой конкуренции и в отсутствие миграции соответствуют случаю  $n = 3$  (по сравнению со случаями  $n = 1$  и  $n = 2$ ).

С учетом сравнения представленных на рис. 2–7 траекторий системы (1) следует отметить, что более значимо вид функции управления влияет на плотность популяций при использовании алгоритма дифференциальной эволюции. Эффективность влияния функции управления на численность популяций при использовании алгоритма Пауэлла является менее значительной.

С учетом результатов, приведенных в таблицах 1 и 2, можно сделать вывод, что эффективность полиномиальных функций управления с учетом рассмотренных алгоритмов оптимизации максимальна при  $n = 2$  (квадратичные функции управления). Изучение эффективности других функций глобальной параметрической оптимизации в рассмотренной задаче поиска функций управления представляет интерес для дальнейших исследований.

Полученные результаты могут быть использованы для поиска функций управления с использованием символьной регрессии и искусственных нейронных сетей.

## Заключение

В статье развит подход к исследованию нелинейных управляемых моделей, описывающих динамику взаимодействующих сообществ, на основе методов глобальной оптимизации и алгоритмов символьных вычислений. В результате компьютерного исследования модели с конкуренцией и миграцией получены результаты численных экспериментов по поиску законов управления, оптимальных траекторий и критерия качества управления.

Изучен случай представимости функций управления в виде положительных полиномов. Сравнительный анализ результатов для различных степеней полиномов, в виде которых осуществляется поиск функций управления, показал существенные различия для траекторий в случае первой, второй и третьей степеней полиномов.

Выявлены преимущества и недостатки алгоритмов Пауэлла и алгоритма дифференциальной эволюции для решения задач поиска оптимального управления в системах с миграционными потоками. В качестве инструментального средства решения задачи оптимального управления и исследования модели использован программный комплекс, разработанный с помощью библиотек языка Python. Результаты экспериментов, полученные с применением этого комплекса, позволили сделать ряд выводов и выявить эффекты, связанные с наличием конкуренции и миграции в системе и с различными типами полиномиальных функций управления.

Разработанное инструментальное обеспечение может служить основой новых модулей (модулей управления и численной оптимизации) для программных комплексов моделирования стохастических систем. Указанные комплексы использованы в [14, 17, 18] для изучения различных типов динамических моделей.

## Список литературы

1. Tuckwell H.C. A study of some diffusion models of population growth // *Theoretical population biology*. 1974. V. 5. P. 345–357.

2. Lu Z., Takeuchi Y. Global asymptotic behaviour in single-species discrete diffusion systems// *J. Math. Biol.* 1993. V. 32. P. 67–77.
3. Zhang Xin-an, Chen Lansun. The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka–Volterra model // *Nonlinear Analysis*. 2007. V. 66. P. 2767–2776.
4. Tkachenko N., Weissmann J.D., Petersen W.P., Lake G., Zollikofer C.P.E., Callegari S. Individual-based modelling of population growth and diffusion in discrete time// *PLoS ONE*. 2017. 2(4): e0176101. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176101>
5. Корепина Т.А. Сравнительный анализ подходов к моделированию миграции// *Вопросы территориального развития*. 2017. Вып 1(36). С. 1-12.
6. Свиричев Ю.М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*. М.: Наука, 1987.
7. Синицын И.Н., Дружинина О.В., Масина О.Н. Аналитическое моделирование и анализ устойчивости нелинейных широкополосных миграционных потоков // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16. № 3. С. 3–16.
8. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M., Masina O.N. Construction and analysis of nondeterministic models of population dynamics // In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (Eds.) *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science (CCIS)*. V. 678. Springer, 2016. P. 498–510.
9. Кузенков О.А. Исследование задач управления динамикой популяций на основе обобщенной модели Колмогорова // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009. №5. С. 169–176.
10. Кузенков О. А., Кузенкова Г.В. Оптимальное управление системами авторепродукции // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2012. № 4. С. 26-37.
11. Данилова И.В. Задача оптимального поведения популяции в ареале с учетом внутривидовой конкуренции и миграции // *Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019* (Москва, 17-19 июня 2019 г.). Научное электронное издание. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1476–1479.
12. Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой*. 2-е изд. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 448 с.
13. Sakharov M., Karpenko A. Meta-optimization of mind evolutionary computation algorithm using design of experiments // In: Abraham A., Kovalev S., Tarassov V., Snasel V., Sukhanov A. *Intelligent Information Technologies for Industry. ITI'18 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing (AISC)*. Springer, 2018 . V. 874. P. 473– 482.
14. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M, Masina O.N., Mijajlovic N., Olenev N., Petrov A.A. The generalized algorithms of global parametric optimization and

- stochastization for dynamical models of interconnected populations // In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2020. *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer, 2020. V. 12422. P. 40–54.
15. Oliphant T.E. Python for Scientific Computing // *Computing in Science and Engineering*. 2007. V. 9. No. 3. P. 10–20.
16. *SciPy Tutorial*. Режим доступа: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/> (дата обращения 20.10.2020).
17. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic, M., Masina O.N., Mijajlovic N. Problems of synthesis, analysis and optimization of parameters for multidimensional mathematical models of interconnected populations dynamics // In: Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (Eds.). Optimization and Applications. OPTIMA 2020. *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*. Springer, 2020. V. 1145. P. 56–71
18. Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Velieva T.R., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S., Sevast'yanov L.A. Implementing a method for stochastization of one-step processes in a computer algebra system // *Programming and Computer Software*. 2018. (44). pp. 86–93.