*Ссылка на статью:*
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2021, № 1, с. 22-29.

Поступила: 13.01.2021
Окончательный вариант: 19.03.2021



***УДК 517.977.1***

# Двухуровневая стабилизация многосвязной системы с периодической матрицей коэффициентов кусочно-постоянным управлением

***Каледина Е. А.***

elena.lizina@gmail.com
НИ МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

В работе рассматривается многосвязная управляемая динамическая система с периодической матрицей коэффициентов и кусочно-постоянным управлением. Найдены условия для двухуровневой стабилизации положения равновесия указанной системы, когда локальные управления стабилизируют положение равновесия отдельных линейных подсистем, а глобальное управление действует на межсистемные связи. Для этого осуществляется переход от исходной системы с периодическими матрицами к вспомогательной системе с кусочно-постоянными матрицами коэффициентов, для которой находится оценка приближенной матрицы монодромии.

***Ключевые слова:*** *многосвязная динамическая система, периодическая матрица коэффициентов, кусочно-постоянное управление, двухуровневое управление, асимптотическая устойчивость, стабилизация.*

## Введение

Современные управляемые динамические объекты представляют собой комплекс подсистем, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом. Примерами таких объектов являются исполнительные системы роботов, летательные аппараты и т. д. Математическими моделями подобных объектов являются многосвязные системы, состоящие из отдельных подсистем, объединяемые посредством внутрисистемных связей. При этом рассматриваемая система часто является нестационарной.

Основная часть исследований посвящена изучению нестационарных непрерывных и дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами [1-10 и др.]. В меньшей мере встречаются работы, касающиеся нестационарных непрерывно-дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами [11-12 и др.]. В данной работе рассматривается задача стабилизации многосвязной непрерывной системы с периодическими матрицами коэффициентов кусочно-постоянным управлением. Многосвязность системы приводит к определенным трудностям в применении централизованного управления, так как межсистемные связи могут осуществлять дестабилизирующее воздействие на работу подсистем. Предлагается кусочно-постоянное управление сформировать в виде суммы локального (уровень подсистем) и глобального управлений (уровень исходной многосвязной системы).

С точки зрения теории управления системы с периодически изменяющимися коэффициентами являются нестационарными системами. В работе используется подход, который позволяет свести исследование нестационарной многосвязной дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами к изучению системы с кусочно-постоянными коэффициентами.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)u(ph), \qquad (1)$$

где $x \in R^n, u \in R$, $A(t)$ – $\omega$-периодическая матрица размерности $n \times n$, $b(t)$ – $\omega$-периодический вектор размерности $n$. Управление $u(ph)$ представляет собой кусочно-постоянную скалярную функцию, зависящую от моментов квантования. $h$>0 – шаг квантования, $p$=0, 1, …, $x(0) = x_0$ – начальное условие, характеризующее начальное отклонение от программного режима. Матрица $A(t)$ допускает неперекрывающуюся декомпозицию вида

$$\dot{x}_s = A_s(t)x_s + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{q} A_{sj}(t)x_j, \quad s = \overline{1,q}.$$

где $x_s \in R^{n_s}, A_s(t)$ – $\omega$-периодические матрицы размерности $n_s \times n_s$; $A_{sj}(t)$ – $\omega$-периодические матрицы размерности $n_s \times n_j$, $\sum_{s=1}^{q} n_s = n$. Ни одна из компонент вектора $x_s$ не является одновременно компонентой какого-либо другого вектора $x_j$ другой подсистемы.

Пусть кусочно-постоянное управляющее воздействие формируется в виде суммы $u_s = u_s^{\Lambda} + u_s^{\Gamma}$, где $u_s^{\Lambda} = u_s^{\Lambda}(ph)$ – управления на уровне подсистем (локальное управление), стабилизирующее подсистемы

$$\dot{x}_s = A_s(t)x_s + b_s(t)u_s^{\Lambda}(ph), \qquad (2)$$

$u_s^{\Gamma} = u_s^{\Gamma}(ph)$ – управление на уровне исходной системы (1) (глобальное управление), воздействующее на межсистемные связи [13]. При подстановке указанного управления система (1) примет вид

$$\dot{x}_s = A_s(t)x_s + b_s(t)u_s^{\Lambda}(ph) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q} A_{sj}(t)x_j + b_s(t)u^{\Gamma}(ph), s = \overline{1,q} \qquad (3)$$

Здесь $b_s(t)$ – $\omega$-периодический вектор-столбец размерности $n_s$, матрица $A_s(t)$ отражает динамические свойства $s$-й подсистемы (2), а слагаемые $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q} A_{sj}(t)x_j$ содержат все остальные фазовые переменные $x_j$, $j = \overline{1,q}$ и указывают на связи между подсистемами.

В данной работе исследуется задача об асимптотической устойчивости многосвязной системы (3). Будем считать, что локальные управления не стабилизируют движение системы (3) на глобальном уровне. В этом случае естественно поставить задачу о нахождении условий, которые накладываются на глобальное управление.

## 2. Переход к многосвязной системе с кусочно-постоянными коэффициентами

Для решения поставленной задачи период $[0,\omega]$ разбивается точками $\{t_k\}_{k=\overline{0,m-1}}$ так, чтобы $t_0 = 0, t_m = \omega$ и осуществляется переход к вспомогательной системе с кусочно-постоянными матрицами, построенными по следующим правилам.

Пусть $h_k$ – величина $k$-го шага разбиения, т.е. $h_k = t_{k+1} - t_k$. В системе (3) на каждом промежутке $t_k < t \le t_{k+1}$ периодические матрица и вектор $A(t)$ и $b(t)$ заменяются постоянными матрицами, построенными по следующим правилам

$$\bar{A}^k = \frac{1}{h_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t)dt,\ \bar{b}^k = \frac{1}{h_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t)dt,\ k = \overline{0,m-1}$$

Тогда на отрезке $[0,\omega]$ матрицу $A(t)$ заменит кусочно-постоянная матрица $A^*(t)$

$$A^*(t) = \{\bar{A}^1, \dots, \bar{A}^m\} \text{ где } min_{t\in(t_k,t_{k+1}]}A(t) \le \bar{A}^k \le max_{t\in(t_k,t_{k+1}]}A(t),$$
$$t \in (t_k, t_{k+1}], k = \overline{0,m-1}.$$

Аналогично в рассмотрение вводится кусочно-постоянный вектор $b^*(t)$

$$b^*(t) = \{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m\} \text{где } min_{t\in(t_k,t_{k+1}]}b(t) \le \bar{b}^k \le max_{t\in(t_k,t_{k+1}]}b(t),$$
$$t \in (t_k, t_{k+1}], k = \overline{0,m-1}.$$

Обозначим через $x^*(t)$ – непрерывный вектор, удовлетворяющий в точках непрерывности матриц $A^*(t)$ и $b^*(t)$ системе дифференциальных уравнений с кусочно-постоянной матрицей

$$\dot{x}_s^* = A_s^*(t)x_s^* + b_s^*(t)u_s^{\Lambda}(ph) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q} A_{sj}^*(t)x_j + b_s^*(t)u^{\Gamma}(ph), s = \overline{1,q} \qquad (4)$$

Рассматривая систему (4) на промежутке $t \in (t_k, t_{k+1}]$, получим многосвязную систему с постоянными коэффициентами и кусочно-постоянным управлением, изученную в работе [14]

$$\dot{x}_s^* = \bar{A}_s^k x_s^* + \bar{b}_s^k u_s^{\Lambda}(ph) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q} \bar{A}_{sj}^k x_j^* + \bar{b}_s^k u_s^{\Gamma}(ph), s = \overline{1,q}. \qquad (5)$$

Законы управления для данной системы формируются по следующим правилам:

$$\bar{u}_s^{\Lambda} = (\bar{c}_s^k)^T x_s^*(ph),$$

$$\bar{u}_s^{\Gamma} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{q} \left(\bar{c}_j^k\right)^T x_j^*(ph).$$

При этом $\bar{c}_s^k$ есть постоянные векторы размерности $n_s$, $s = \overline{1,q}$ такие, что линейные системы

$$\dot{x}_s^* = (\bar{A}_s^k + \bar{b}_s^k\,(\bar{c}_s^k)^T)x_s^* \tag{6}$$

асимптотически устойчивы, т. е. коэффициенты усиления локального управления должны удовлетворять условию $Re\,\lambda_j\left(\bar{A}_s^k + \bar{b}_s^k(\bar{c}_s^k)^T\right) < 0$. Как известно [13], данное условие выполнимо тогда и только тогда, когда матрицы управляемости Калмана $\{\bar{b}_s^k, \bar{A}_s^k\bar{b}_s^k, \ldots, (\bar{A}_s^k)^{n_s-1}\bar{b}_s^k\}$ имеют ранг $n$. Отметим, что условие управляемости выполнено при $t \in (ph,(p+1)h]$, $k = \overline{0,m-1}$ и далее будем считать, что такие коэффициенты уже найдены [15-17]. Коэффициенты усиления «глобального» управления системы (5) должны обеспечивать отрицательность собственных чисел матрицы $\tilde{\tilde{A}}$

$$Re\lambda_j\left(\tilde{\tilde{A}}^k\right) < 0, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\tilde{A}}^k = \begin{pmatrix} -\dfrac{d_1^k}{2\lambda_{21}^k} & \dfrac{c_1^k\left\|\bar{A}_{12}^k + \bar{b}_2^k(\bar{c}_2^k)^T\right\|}{2(\lambda_{11}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{12}^k)^{\frac{1}{2}}} & \cdots & \dfrac{c_1^k\left\|\bar{A}_{1q}^k + \bar{b}_q^k(\bar{c}_q^k)^T\right\|}{2(\lambda_{11}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{1q}^k)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{c_2^k\left\|\bar{A}_{21}^k + \bar{b}_1^k(\bar{c}_1^k)^T\right\|}{2(\lambda_{12}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{11}^k)^{\frac{1}{2}}} & -\dfrac{d_1^k}{2\lambda_{21}^k} & \cdots & \dfrac{c_2^k\left\|\bar{A}_{2q}^k + \bar{b}_q^k(\bar{c}_q^k)^T\right\|}{2(\lambda_{12}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{1q}^k)^{\frac{1}{2}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{c_q^k\left\|\bar{A}_{q1}^k + \bar{b}_1^k(\bar{c}_1^k)^T\right\|}{2(\lambda_{1q}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{11}^k)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{c_q^k\left\|\bar{A}_{q2}^k + \bar{b}_2^k(\bar{c}_2^k)^T\right\|}{2(\lambda_{1q}^k)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{12}^k)^{\frac{1}{2}}} & \cdots & -\dfrac{d_q^k}{2\lambda_{2q}^k} \end{pmatrix}$$

Здесь $c_s, d_s, \lambda_{1s}, \lambda_{2s}$ определяются из условий Н. Н. Красовского [18]

$$\lambda_{1s}\|x_s\|^2 \le V_s(x_s) \le \lambda_{2s}\|x_s\|^2, \quad \left|\frac{\partial V_s(x_s)}{\partial x_s}\right| \le c_s\|x_s\|,$$

$$\left.\frac{dV_s(x_s)}{dt}\right|_{(6)} = -d_s\|x_s\|^2, \quad s = \overline{1,q},$$

наложенных на компоненты векторной функции Ляпунова $V(x) = (V_1(x_1), \ldots, V_q(x_q))^T$ для системы (5).

В качестве управления для системы (4) выбирается функции вида

$$u_s^{\Lambda} = (c_s^*(t))^T x_s^*(ph),$$

$$\bar{u}_s^{\Gamma} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{q} \left(c_j^*(t)\right)^T x_j^*(ph), \tag{8}$$

где

$$c_s^*(t) = \{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{m-1}\}, \ \ c_s^*(t) = \bar{c}_s^k \text{ при } t \in (t_k, t_{k+1}], k = \overline{0,m-1}. \tag{9}$$

После подстановки кусочно-постоянного управления (8) система (4) примет вид

$$\dot{x}_s^* = A_s^*(t)x_s^* + b_s^*(t)(c_s^*(t))^T x_s^*(ph) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q} A_{sj}^*(t)x_j + b_s^*(t)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q}\left(c_j^*(t)\right)^T x_j^*(ph), s = \overline{1,q}$$

или в матричной форме:

$$x^* = \hat{A}^*(t)x^* + \hat{B}^*(t)\hat{C}^*(t)x^*(ph), \tag{10}$$

$$\hat{A}^*(t) = \begin{pmatrix} A_1^*(t) & A_{12}^*(t) & \dots & A_{1q}^*(t) \\ A_{21}^*(t) & A_2^*(t) & \dots & A_{2q}^*(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1}^*(t) & A_{q2}^*(t) & \dots & A_q^*(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^*(t) = \begin{pmatrix} b_1^*(t) \\ b_2^*(t) \\ \dots \\ b_q^*(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{C}^*(t) = \begin{pmatrix} c_1^*(t) \\ c_2^*(t) \\ \dots \\ c_q^*(t) \end{pmatrix}$$

Отметим, что разбиение периода $[0, \omega]$ матрицы и вектора точками $\{t_k\}_{k=\overline{0,m-1}}$ может происходить несколькими случаями: точки разбиения $t_k$ могут совпадать с моментами квантования системы (3), промежуток разбиения $(t_k, t_{k+1}]$ может содержать несколько моментов квантования $ph$, и случай когда в последовательности точек разбиения $t_k = ph$, $t_{k+2} = (p+1)h$, а $t_{k+1}$ не совпадает ни с одним моментов квантования. При этом [14], независимо от способа разбиения периода матрица монодромии линейной системы с кусочно-постоянными коэффициентами (9) оценивается через матрицу монодромии системы

$$x^* = (\hat{A}^*(t) + \hat{B}^*(t)\hat{C}^*(t))x^*. \tag{11}$$

## 3. Стабилизация многосвязной непрерывной системы с периодическими матрицами коэффициентов кусочно-постоянным управлением

Итак, вывод относительно устойчивости или неустойчивости системы (10) можно сделать оценив мультипликаторы фундаментальной матрицы решений системы (11). Отметим, что для системы (11) в силу выбора управления выполняется условие асимптотической устойчивости решения, т. е. мультипликаторы матрицы монодромии данной системы по модулю меньше единицы [19]. В работе [20] проведено обоснование того, что кусочно-постоянные коэффициенты управления (8) системы (10) $c_s^*(t)$ решают задачу стабилизации для уравнения (1). Тогда, учитывая многосвязность системы, будет иметь место следующая теорема.

***ТЕОРЕМА.*** *Пусть для системы (4) построено стабилизирующее двухуровневое управление вида (8)*

$$u_s^{\Lambda} = (c_s^*(t))^T x_s^*(ph),$$

$$\bar{u}_s^{\Gamma} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{q}\left(c_j^*(t)\right)^T x_j^*(ph),$$

*с кусочно-постоянными коэффициентами, вычисляемыми по правилам (9)*

$$c_s^*(t) = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m-1}\},\ \ c_s^*(t) = \bar{c}_s^k \ \textit{при}\ t \in (t_k, t_{k+1}], k = \overline{0, m-1}$$

*где $\bar{c}_s^k$ выбираются обеспечивающими отрицательность собственных чисел матрицы $\tilde{\tilde{A}}$ (7).*

*Тогда, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0, \omega]$, что непрерывные коэффициенты кусочно-постоянного управления*

$$u_s^A = (c_s(t))^T x_s(ph)$$
$$u_s^\Gamma = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{q} \left(c_j(t)\right)^T x_j(ph),$$

*системы (3) удовлетворяют условию*

$$\|c(t)^T - (c^*(t))^T\| \le \frac{\varepsilon}{3L}$$

*то верно*

$$\|x(t) - x^*(t)\| \le \varepsilon\Omega\omega e^{\omega(R+1)}, \quad (12)$$

*где $x(t)$ – решение системы (3), $x^*(t)$ – решение системы (4), $L$ – верхняя граница нормы вектора $b(t)$, $R$ – верхняя граница нормы матрицы $(A(t) + b(t)c(t)^T)$, $\Omega > 0$ – вещественное число.*

Далее рассмотрим характеристические уравнения
$$det(x(\omega) - \rho E) = 0 \text{ и } det(x^*(\omega) - \rho^* E) = 0,$$
где $x$ и $x^*$ решения соответственно систем (3) и (4), а $\rho_j$ и $\rho_j^*(h)$ $(j = \overline{1,n})$ – корни указанных уравнений. Так как корни $\rho_j^*(h)$ являются непрерывными функциями величины $h$, то в силу соотношения (12) имеем
$$\lim_{h\to 0} \rho_j^*(h) = \rho_j \ (j = \overline{1,n}).$$

Таким образом, выбрав $h$ достаточно малым, можно определить мультипликаторы $\rho_j$ с любой степенью точности. Отметим, что решение непрерывной системы (11) асимптотически устойчиво по Ляпунову, а значит при всех $h \le h_0$ решение системы (4) расчетно асимптотически устойчиво. В этом случае абсолютное значение мультипликаторов $\rho_j^*(h)$ $(j = \overline{1,n})$ системы (4) меньше единицы. По доказанной теореме мультипликаторы исходной периодической системы (3) также меньше единицы, что означает ее асимптотическую устойчивость.

## Заключение

Таким образом, доказано существование стабилизирующего двухуровневого кусочно-постоянного управления многосвязной системы с периодическими матрицами коэффициентов. Для этого рассматриваемая система переводится в систему с кусочно-постоянными коэффициентами, для которой строится стабилизирующее управление. При выполнении условий теоремы построенное по правилам (7)–(9) двухуровневое кусочно-постоянное управление стабилизирует линейные подсистемы (2) и положение равновесия исходной многосвязной системы (3).

## Список литературы


1. Зайцев В.А. Стабилизация аффинных управляемых систем с периодическими коэффициентами // *Дифференциальные уравнения.* 2013, Т. 49, № 12, с. 1664–1672.
2. Зайцев В.А. Достаточные условия равномерной глобальной асимптотической стабилизации билинейных неоднородных периодических систем с устойчивой свободной динамикой // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. 2015, Т. 20, № 5, с. 1161–1163.
3. Кунцевич В.М. Оптимальное управление дискретными системами с неизвестными нестационарными параметрами // *Автоматика и Телемеханика*. 1980, №2, с. 79–88.
4. Морозов М. В. Робастная устойчивость дискретных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // *Проблемы управления.*2013, № 4, с. 11–15
5. Фомичев В.В. Подходы к стабилизации систем с периодическими коэффициентами // *Системы высокой доступности.* 2017, Т. 13, № 4, с. 60–67.
6. Цыпкин Я.З. Новые классы дискретных периодических систем управления // *Автоматика и Телемеханика*. 1994, №12, с. 76–92.
7. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* М.: Наука, 1972.
8. Dragan V., Toader M., Stoica A.-M. $H_2$ optimal controllers for a large class of linear stochastic systems with periodic coefficients // *Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications.* 2011, v. 3, № 1, p. 87–105.
9. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to one class of nonlinear systems of neutral type with periodic coefficients in linear terms // *Динамические системы*. 2015, Т. 5(33), № 1-2, с. 3–11.
10. Zheng X., Xie J. Bifurcation control of mechanical system with periodic coefficients // *Xinan Jiaotong Daxue Xuebao/Journal of Southwest Jiaotong University*. 2014, № 49(4), p. 741–745.
11. Зубер И.Е. Синтез стабилизирующего управления для нелинейных дискретных объектов // *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд.* 1989, с. 216–219.
12. Lizina E. A. Stabilization of multivariable continuous-discrete system with periodic matrix of coeffitient // *Современные тенденции развития науки: материалы Всероссийс. очно-заочн. науч. конф. молод. учен. на англ. яз*. Саранск: Изд-во мордов. ун-та, 2013. С. 57–60.
13. Воронов А.А. *Введение в динамику сложных управляемых систем*. М.: Наука, 1985.

14. Лизина Е.А., Щенников В.Н. Двухуровневая стабилизация многосвязной гибридной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями // *Системы управления и информационные технологии*. 2011, № 2(44), с. 30–34.
15. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В. Р. *Математическая теория конструирования систем управления*. М.: Высшая школа, 1998.
16. Леонов Г.А., Шумафов М.М. *Методы стабилизации линейных управляемых систем*. СПб.: Изд–во СПбГУ, 2005.
17. Уланов Б. В. О стабилизации динамических объектов векторным непрерывным управление // *Изв. вузов. Матем.* 1987, № 6, с. 88–89.
18. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. М.: Физматлит, 1959.
19. Блинов И.Н. Линейные дифференциальные системы с кусочно-постоянными периодическими коэффициентами // *Автоматика и телемеханика*. 1965, Т. XXVI, № 1, с. 180–183.
20. Лизина Е.А., Щенникова Е.В., Щенников В.Н. Стабилизация непрерывно-дискретных систем с периодическими матрицами коэффициентов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2013, № 1, с. 181–195.