Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2021, № 1, с.102-108.

Поступила: 11.05.2021
Окончательный вариант: 11.05.2021

УДК 519.218.5

Математическая модель центра обслуживания вызовов со случайной задержкой при многоэтапном обслуживании

Савинов Ю. Г.*, Пронин В. И., Курицин А. Е.

*uras@aport.ru
УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена математическая модель центра обслуживания вызовов со случайной задержкой при многоэтапном обслуживании. Математическая модель построена в терминах точечных процессов и их компенсаторов. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова*: система массового обслуживания, центр обслуживания вызовов, случайная задержка, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование*.

Введение

Центры обслуживания вызовов (ЦОВ) широко распространены в повседневной жизни. Это различные колл-центры банков, сотовых и страховых компаний и т.д. Если под «вызовами» понимать не только звонки, а любые обращения, то ЦОВами можно считать, например, поликлиники, а также многофункциональные центры (МФЦ) обслуживания граждан и др.

Программное обеспечение, на котором работают современные ЦОВ, использует аналитические модели систем массового обслуживания (СМО). С помощью них определяется уровень занятости операторов центра в определенное время суток. Также с помощью математических моделей строятся разные алгоритмы перенаправления заявок, благодаря которым принимается решение о перемаршрутизации вызова к определенному оператору [1]. Создание математических моделей – неотъемлемая часть управления работой центров обслуживания вызовов [1]. Для математического моделирования работы ЦОВ используются различные подходы: классический подход теории массового обслуживания - в терминах марковских процессов [2-14], существуют модели ЦОВ, которые основаны на динамическом программировании [15-16], также актуально современное траекторное описание в терминах точечных (считающих) процессов [17-26].

Траекторное (семимартингальное) описание ЦОВ позволяет в едином ключе создавать математические модели и проводить имитационное моделирование как марковских так и немарковских ЦОВ, приоритетных, мультисервисных, гомогенных и гетерогенных ЦОВ, единых и распределенных ЦОВ, с задержкой в обслуживании, с повторными вызовами, управляемых (с изменяющейся структурой) и других типов ЦОВ.

Цель данной работы – продемонстрировать возможности траекторного подхода для моделирования ЦОВ и построить математическую модель центра обслуживания вызовов со случайной задержкой при многоэтапном обслуживании в семимартингальных терминах [17].

1. Постановка задачи

В настоящей работе предлагается следующая постановка задачи: в ЦОВ могут поступать 3 типа (принято для упрощения, увеличение числа типов не усложняет принципиально модель) заявок, требующих различное среднее время обслуживания и квалификации операторов. Допустим, что интервалы времени между прибытием клиентов представлены экспоненциально распределенными величинами, то есть входящий поток пуассоновский с интенсивностью $\lambda > 0$, а время обслуживания клиентов - экспоненциально распределенными величинами со средними значениями μ_1, μ_2, μ_3 для первого, второго и третьего типов заявок соответственно. Доли клиентов первого, второго и третьего типов во входящем потоке известны из статистики работы ЦОВ и равны p_1, p_2, p_3 соответственно. При этом выполняется условие $p_1 + p_2 + p_3 = 1.$

Маршрутизатор ЦОВ (см. рис. 1) отправляет заявку $i -$ го типа в $i -$ ый локальный ЦОВ, представляющий собой многоканальную СМО из n_i операторов имеющих одинаковую квалификацию со среднем временем обслуживания μ_i. К каждому локальному ЦОВ формируется отдельная неограниченная очередь. Для некоторых типов заявок предусмотрено многоэтапное обслуживание (в модели для простоты только для типа 1 предусмотрены два этапа обслуживания) со случайной задержкой при передаче заявки к следующему оператору. Задержка означает, что заявки отправляются на обслуживание в следующий узел не мгновенно, а со случайной задержкой (в модели имеет равномерное распределение $\tau \sim R[1;2]$).

2. Математическая модель

Аналитическое исследование данной модели возможно только при существенных ограничениях и предположениях (введение задержек делает модель немарковской). Поэтому основным способом исследования выбрано имитационное моделирование. Для имитационного моделирования наиболее подходит семимартингальное (траекторное) описание.

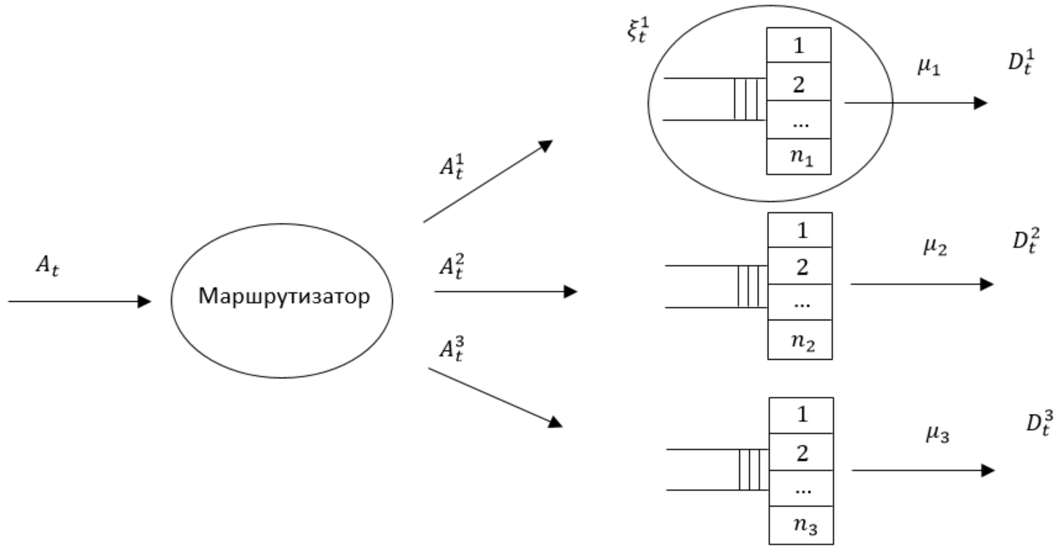

Рис. 1. Схема ЦОВ

Модель в терминах считающих процессов позволяет легко переходить от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование. Выбор в пользу семимартингального описания подкрепляется еще и тем фактом, что любой случайный процесс в дискретном времени является семимартингалом [17]. Поэтому в данной работе выбрано семимартингальное описания СМО в терминах точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [17].

Введем считающие (точечные) процессы [17]:

$\mathrm{A} = (\mathrm{A_t})_{\mathrm{t}\geq 0}$ – число заявок, поступивших в ЦОВ за время $\mathrm{t} \geq 0$;

$A^i = (A_t^i)_{t\geq 0}$ - число заявок i-го типа *(i=1,2,3)*, поступивших в систему за время $t \geq 0$, $A_0^i = 0$;

$D^i = (D_t^i)_{t\geq 0}$- число обслуженных заявок i-го типа *(i=1,2,3)* за время $t \geq 0$, $D_0^i = 0$.

Точечные процессы $A, D^1,\ D^2,\ \ D^3$ определяются своими компенсаторами в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [17]. Компенсатор для процесса $A = (A_t)_{t\geq 0}$, определяется соотношениями (1) - (2):

$$A_t = \widetilde{A_t} + m_t^A, \tag{1}$$

$$\widetilde{A_t} = \lambda \cdot t,\ \lambda > 0, \tag{2}$$

где $\widetilde{A_t}$ - неубывающий предсказуемый процесс, m^A– мартингал [17].

Работу маршрутизатора можно смоделировать следующим образом. В моменты поступления заявок (в моменты скачков A_t) генерируется случайная величина $\eta \sim R[0; 1]$. Исходя из понятия геометрической вероятности, если $\eta \epsilon \left[0;\ p_1\right]$, то с вероятностью p_1 заявка должна поступить в первый локальный ЦОВ (для обработки заявок первого типа).

Тогда для считающего процесса A^1 можно записать:

$$A_t^1 = \int_0^t I(\eta < p_1) dA_s, \tag{3}$$

где $I(\cdot)$ −индикаторная функция. Аналогично для процессов A^2, A^3 запишем:

$$A_t^2 = \int_0^t I(p_1 < \eta \le p_1 + p_2) dA_s, \tag{4}$$

$$A_t^3 = \int_0^t I(p_1 + p_2 \le \eta) dA_s. \tag{5}$$

То есть в момент скачка процесса A ($dA_s = 1$) с вероятностью p_1 скачок происходит у A^1, аналогично с вероятностью p_2 скачок происходит у A^2 и с вероятностью p_3 у A^3.

Точечные процессы D^1, D^2, D^3 также определяются своими компенсаторами $\widetilde{D}^i = (\widetilde{D}_t^i)_{t\ge 0}$ в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [17]:

$$D_t^i = \widetilde{D}_t^i + m_t^{D^i}, \tag{6}$$

где $\widetilde{D}^i$- неубывающие предсказуемые процессы m^{D^i}- мартингалы, $i = 1,2,3$.

Компенсаторы для процессов $D^i = (D_t^i)_{t\ge 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D}_t^i = \int_0^t \mu_i \cdot \min(\xi_s^i, n_i)\, ds, i = 1,2,3. \tag{7}$$

Здесь ξ_t^i - числа заявок *i-го* типа (*i*=1,2,3) в $i -$ ом локальном ЦОВ в момент времени $t \ge 0$. То есть если $i -$ ом локальном ЦОВ заявок не больше, чем число операторов n_i, то очереди нет, и все заявки обслуживаются, иначе обслуживаются n_i заявок, а остальные находятся в очереди $i -$ ого локального ЦОВ.

Для ξ_t^i - числа заявок *i-го* типа (*i*=1,2,3) в ЦОВ в момент времени $t \ge 0$ можно написать следующие основные балансовые соотношения

$$\xi_t^i = A_t^i - D_t^i,\ i = 1,2,3\ . \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее моделирование случайной задержки (см. рис. 2). Число заявок первого типа, поступивших за время $t \ge 0$ во второй узел определяется формулой:

$$\overline{A}_t^2 = \sum_{i=1}^{D_t^1} I(t \ge \sigma[i] + \tau[i]), \tag{9}$$

где $\sigma[i] = inf\{t: D_t^1 = i\}$ - момент выхода -той заявки из первого узла, $\tau[i] \sim \mathbb{R}[1;2]$ – задержка для i-той заявки, которая происходит после обслуживания заявки в первом узле, при переходе во второй узел. Обработка во втором узле происходит аналогично первому узлу, математическое описание не вызывает затруднений и здесь не описано, чтобы не вводить дополнительные параметры.

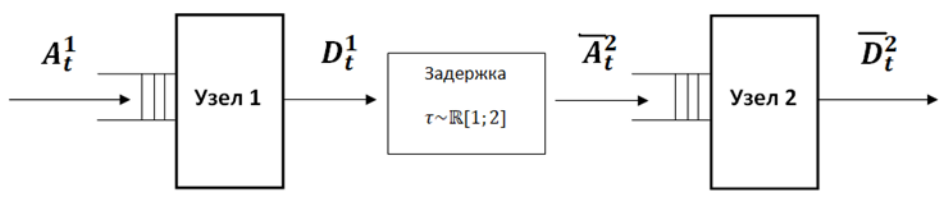

Рис. 2. Схема многоэтапного обслуживания заявок 1 типа со случайной задержкой

3. Итерационные формулы для компьютерного моделирования

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. На стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ из формул (1)-(9) нетрудно получить следующие инфинитезимальные соотношения (10)-(12):

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{10}$$

$$P\{D^i_{t+\Delta} - D^i_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \mu_i \cdot \min\left(n_i, \xi^i_t\right) + o(\Delta),\ i = 1,2,3, \tag{11}$$

$$\overline{A}^2_{t+\Delta} = \overline{A}^2_t + I(\sigma[D^1_{t+\Delta}] + \tau[D^1_{t+\Delta}] = t + \Delta). \tag{12}$$

Формулы (8) - (10) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda \cdot \Delta \ll 1, n\mu_i \cdot \Delta \ll 1$, *i=1,2,3* получим следующие итерационные формулы (для вычисления последующих значений через предыдущие):

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda), \tag{13}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta, \end{cases}$

$$D^i_{t+\Delta} = D^i_t + \delta\left(\mu_i \cdot \min\left(n_i, \xi^i_t\right)\right), i = 1,2,3, \tag{14}$$

$$A^1_{t+\Delta} = A^1_t + I(\eta < p_1) I(A_{t+\Delta} - A_t = 1), \tag{15}$$

$$A^1_{t+\Delta} = A^1_t + I(p_1 < \eta \leq p_1 + p_2) I(A_{t+\Delta} - A_t = 1), \tag{16}$$

$$A^1_{t+\Delta} = A^1_t + I(p_1 + p_2 \leq \eta) I(A_{t+\Delta} - A_t = 1), \tag{17}$$

$$\overline{A}^2_{t+\Delta} = \overline{A}^2_t + I(\sigma[D^1_{t+\Delta}] + \tau[D^1_{t+\Delta}] = t + \Delta). \tag{18}$$

Заключение

В результате выполнения данной работы была построена математическая модель ЦОВ со случайной задержкой при многоэтапном обслуживании в семимартингальных терминах. Продемонстрированы возможности и простота использования семимартингального подхода при моделировании ЦОВ. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым может проводиться имитационное моделирование.

Список литературы

1. Глушак Е.В. Исследование и разработка математических моделей распределенных центров обслуживания вызовов: дис. … канд. техн. наук: 05.12.13. Самара, 2014. 134 с.

2. Глушак Е.В., Росляков А.В. Исследование моделей распределенного центра обслуживания вызовов // *Тез. докл. на XII Международной научно-технической конференции «Проблемы техники и технологии телекоммуникаций», Казань, 2011.* С. 185-186.
3. Palm C. Intensitat schwankungen im fernsprechverkehr // *Ericsson technics.* 1943, № 44, P. 1-189.
4. Риордан Д. Вероятностные системы обслуживания. Пер. с англ. М.: Связь, 1966.
5. Baccelli F., Hebuterne G. On queues with impatient customers // Performance, North-Holland publishing company. 1981. P. 159-179.
6. Boxma O.J., de Waal P.R. Multiserver queues with impatient customers // *ITC.* 1994, № 14, p .743-756.
7. Haugen R.B., Skogan E. Queueing systems with stochastic time out // *IEEE Transactions on Communications*. 1980, № 28, p.1984-1989.
8. Brandt A., Brandt M. On the M(n)/M(s)/s queue with impatient calls // Performance evaluation. 1999, № 35, p.1-18.
9. Brandt A., Brandt M. Asymptotic results and a Markovian approximation for the M(n)/M(s)/s+GI system // Queueing systems: theory and applications (QUESTA). 2002, № 41, p.73-94.
10. Palm C. Research on telephone traffic carried by full availability groups // *Tele*. 1957, №1, p. 107.
11. Garnett O., Mandelbaum A., Reiman M.I. Designing a call center with impatient customers // *Manufacturing and Service Operations Management.* 2002, № 4, p. 208-227.
12. Aguir S., Karaesmen F., Aksin O.Z., Dallery Y. On the interaction between retrials and sizing of call centers // Working paper, Koc University, Department of Industrial Engineering. 2004. P. 434.
13. Росляков А.В. Цыганков Н.И. Анализ моделей распределенных центров обслуживания вызовов // *Электросвязь*. 2005, № 8, с. 22-25.
14. Зарипова Э. Р. Математическая модель центра обслуживания вызовов с двумя типами абонентов // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 2010, № 4, с.76-82.
15. Ваняшин С.В. Исследование и разработка моделей мультисервисного центра обслуживания вызовов: дис. ... канд. тех. наук: 05.12.13. М. 2006. - 157 с.
16. Grinold R.C., Stanford R.E. Optimal control of a graded manpower system // *Management Science*. 1974, № 20, p.1201-1216.
17. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов:* учебное пособие. Ульяновск: УлГУ, 2009.
18. Бутов А.А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания:* учебно-методическое пособие. Ульяновск: УлГУ, 2007.

19. Бутов А.А., Галимов Л.А. Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах // *Современные проблемы науки и образования.* 2015, № 2, с. 758.
20. Бутов А.А., Галимов Л.А. Стохастическая имитационная модель оценки резерва произошедших, но не заявленных страховых убытков в терминах СМО // *Фундаментальные исследования*. 2016, № 8-2, с. 234-238.
21. Бутов А.А., Галимов Л.А. Оптимальное управление распределением заявок в многоканальной системе массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком поступления заявок и экспоненциальным временем обслуживания // *Естественные и технические науки*. 2014, № 9-10 (77), с. 244-247.
22. Столяров И.А., Табакова Е.Д., Савинов Ю.Г., Столяров И.А. Семимартингальная модель многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. В двух частях*. Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2018, часть 1, с. 502-506.
23. Столяров И.А., Савинов Ю.Г. Семимартингальная модель СМО с динамическим приоритетом // *Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы III научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых: 24-25 апреля 2017 г. – Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич*, 2017. – стр. 553-557.
24. Савинов Ю.Г., Исмаилова М.В., Рослов М.Э. Траекторные методы моделирования многофазных СМО // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии.* 2019, № 1, с. 85-91.
25. Савинов Ю.Г., Рослов М.Э., Куманина Я.А. Стратегия адаптивного разделения ресурсов в мультисервисных сетях // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2020, № 1, с. 95-102.
26. Савинов Ю.Г., Тихоненко А.А., Пронин В.И., Щукин А.Н. Семимартингальная модель СМО с произвольным временем ожидания «нетерпеливых» заявок // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2019, № 2, с. 81-88.