Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2021, № 2, с. 97–104.
Поступила: 25.11.2021
Окончательный вариант: 28.11.2021

УДК 681.5.075

Анализ свойств управляемости и наблюдаемости математических моделей суточной термометрии

Шугурова М. А.

m.a.shugurova@gmail.com
ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

В статье приводится анализ свойств полной управляемости и наблюдаемости трехмерных дискретных линейных стохастических моделей суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека, заданных в пространстве состояний дискретными линейными стохастическими системами. Исследованы свойства полной наблюдаемости и управляемости канонической модели в вещественном базисе, проведен анализ полной управляемости стандартной наблюдаемой модели, выполнено построение и проведен анализ полной наблюдаемости стандартной управляемой модели.

Ключевые слова: *суточная термометрия, тепловой гомеостаз, линейная дискретная стохастическая система, полная управляемость, полная наблюдаемость.*

Введение

Мониторинг температуры тела человека находит важное применение как в медицине (выявление симптомов опасных состояний), так и в спорте (например, при изучении процессов адаптации и ответной реакции организма спортсмена к физическим нагрузкам). Данные термометрии получают с помощью цифрового термометра, который считывает температуру тела через определенные временные промежутки.

Зависимость температуры тела человека от времени суток может быть представлена как аддитивная смесь детерминистской составляющей и стохастической составляющей. Детерминистская составляющая является периодическим, колебательным процессом, которая в первом приближении может быть представлена моделью гармонического осциллятора с неопределенной, в общем случае, амплитудой и с 24-х часовым периодом. Стохастическую составляющую в исходной модели можно представить гауссовским марковским процессом первого порядка с двумя параметрами, которые также могут быть неопределенными и подлежащими идентификации на основе экспериментальных данных [1–4].

В [4,5] были построены трехмерные математические модели теплового гомеостаза здорового человека, принадлежащие классам непрерывных и дискретных линейных стохастических систем с гауссовскими шумами, в частности: каноническая модель в вещественном базисе — 3dDRCM (3-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model) и стандартная наблюдаемая модель — 3dDSOM (3-dimension Discrete-time Standard Observable Model).

Цель данной работы заключается в анализе свойств полной управляемости и наблюдаемости моделей 3dDRCM и 3dDSOM, а также построении и анализе свойств трехмерной стандартной управляемой модели — 3dDSCM (3-dimension Discrete-time Standard Controllable Model).

1. Модель 3dDRCM

Модель 3dDRCM имеет следующий вид [5, с. 147]:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{t} + a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u_t + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} w_{dt}, \\ z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x_t + v_t, \end{cases} \tag{1}$$

где $c \triangleq \cos\omega_n\tau$, $s \triangleq \sin\omega_n\tau$, $d \triangleq e^{-\lambda\tau}$, $a \triangleq 1-d$, $b \triangleq \sqrt{1-d^2}$, $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$, $T_n = 24$ ч, $\tau \triangleq \Delta t \triangleq t_{i+1} - t_i$ — интервал дискретизации (5 мин), $x_t = [x_1, x_2, x_3]_t^T$ — вектор состояния, $x_0 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0]^T$, u_t — детерминированный вектор входных воздействий, который соответствует среднесуточному уровню температуры ($u_t \approx 36.0^\circ C$), z_t — измерения температуры тела человека, F — переходная матрица состояния, H — матрица наблюдений, B — матрица входных воздействий, w_{dt} — дискретный гауссовский белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2, v_t — ошибка измерения, моделируемая как гауссовский белый шум с нулевым средним и ковариацией $R = (0,125)^2$.

Проверим свойства полной управляемости и наблюдаемости модели (1). Для этого воспользуемся критериями полной управляемости и наблюдаемости линейной дискретной динамической системы, приведенными в [6]. Расчеты будем проводить с использованием системы символьных вычислений Maple.

Пусть n — размер вектора состояния системы.

Критерий полной управляемости. *Дискретная линейная инвариантная во времени система является полностью управляемой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} W_{DTI} = n$, *где* $W_{DTI} = [B|FB|F^2B|...|(F^{n-1})B]$ *— матрица управляемости.*

Критерий полной наблюдаемости. *Дискретная линейная инвариантная во времени система является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} M_{DTI} = n$, *где* $M_{DTI} = [H^T|F^TH^T|(F^2)^TH^T|...|(F^{n-1})^TH^T]^T$ *— матрица наблюдаемости.*

Найдем матрицу управляемости модели (1). Размер вектора состояния $n = 3$, следовательно, $W_{DTI} = [B|FB|F^2B]$, откуда

$$W_{DTI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-d & d\,(1-d) & d^2\,(1-d) \end{bmatrix}, \quad d = e^{-\lambda\tau}.$$

Так как λ и τ по определению не равны нулю, то $d \neq 1$, кроме того, $d > 0$ при всех значениях λ и τ. Следовательно, $\operatorname{rank} W_{DTI} = 1$ и модель (1) не является полностью управляемой.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Модель 3dDRCM не является полностью управляемой при любых допустимых значениях параметров.

Проанализируем свойство полной наблюдаемости модели (1). Матрицу наблюдаемости вычислим по формуле $M_{DTI} = [H^T|F^TH^T|(F^2)^TH^T]^T$. Таким образом,

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\omega_n\tau) + \sin(\omega_n\tau) & -\sin(\omega_n\tau) + \cos(\omega_n\tau) & e^{-\lambda\tau} \\ \cos^2(\omega_n\tau) - \sin^2(\omega_n\tau) + 2\cos(\omega_n\tau)\sin(\omega_n\tau) & -2\cos(\omega_n\tau)\sin(\omega_n\tau) + \cos^2(\omega_n\tau) - \sin^2(\omega_n\tau) & e^{-2\lambda\tau} \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы M_{DTI}:

$$\det M_{DTI} = -2\sin(\omega_n\tau)(e^{-2\lambda\tau} - 2\cos(\omega_n\tau)e^{-\lambda\tau} + 1). \tag{2}$$

После преобразования (2) получим

$$\det M_{DTI} = -4e^{-\lambda\tau}\sin(\omega_n\tau)(\operatorname{ch}(\lambda\tau) - \cos(\omega_n\tau)). \tag{3}$$

В формуле (3) выражение $e^{-\lambda\tau} > 0$ при любых значениях параметров λ и τ. Поскольку λ и τ по определению не равны нулю, то $\operatorname{ch}(\lambda\tau) > 1$ и, следовательно, $\operatorname{ch}(\lambda\tau) - \cos(\omega_n\tau) > 0$ при всех допустимых значениях параметров. Выражение $\sin(\omega_n\tau) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\tau \neq \frac{\pi k}{\omega_n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Модель 3dDRCM является полностью наблюдаемой при условии $\tau \neq \frac{\pi k}{\omega_n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Модель 3dDSOM

Перейдем от модели (1) к стандартной наблюдаемой модели 3dSOM со стандартным гауссовским белым шумом (см. [5, с. 148]).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_*} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_t + a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}}_{B_*} u_t + \sigma b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}}_{G_*} w_{dt}^0, \\ z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_*} x_t^* + v_t, \end{cases} \tag{4}$$

где $x_0^* = [0, s, g]^T$, $-a_3 = d$, $-a_2 = -1 - 2cd$, $-a_1 = d + 2c$, $a \triangleq 1 - d$, $b \triangleq \sqrt{1 - d^2}$, $c \triangleq \cos \omega_n \tau$, $d \triangleq e^{-\lambda\tau}$, $g \triangleq \sin 2\omega_n \tau$, $s \triangleq \sin \omega_n \tau$.

Вычислим матрицу управляемости по формуле $W_{DTI} = [B_* | F_* B_* | F_*^2 B_*]$, откуда

$$W_{DTI} = \begin{bmatrix} 1 - d & d\,(1 - d) & d^2\,(1 - d) \\ d\,(1 - d) & d^2\,(1 - d) & d^3\,(1 - d) \\ d^2\,(1 - d) & d^3\,(1 - d) & d^4\,(1 - d) \end{bmatrix}, \quad d = e^{-\lambda\tau}.$$

Так как λ и τ по определению не равны нулю, то $d \neq 1$, кроме того, $d > 0$ при всех значениях λ и τ. Поскольку вторая и третья строки матрицы W_{DTI} получаются из первой умножением соответственно на d и d^2, то $\operatorname{rank} W_{DTI} = 1$ и модель (4) не является полностью управляемой. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Модель 3dDSOM не является полностью управляемой при любых допустимых значениях параметров.

Замечание 1. Модель (4) по построению является полностью наблюдаемой при любых допустимых значениях параметров. В этом легко убедиться, вычислив матрицу наблюдаемости, которая в данном случае является единичной.

3. Модель 3dDSCM

Перейдем от канонической модели 3dDRCM к стандартной управляемой модели 3dDSCM (3-dimension Discrete-time Standard Controllable Model). Воспользуемся определением стандартной управляемой модели (см. [6, с. 19]).

Определение 1. *Стандартной управляемой моделью* в дискретном времени со стандартным гауссовским белым шумом называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}_{t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}}_{G} w^0_{dt}, \\ z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{H} x_t + v_t, \end{cases}$$

где $m < n$, $c_0, c_1, \dots, c_m$ и $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ — коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции.

Утверждение 4. Трехмерная дискретная стандартная управляемая модель 3dDSCM имеет вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ x^*_3 \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_{**}} \begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ x^*_3 \end{bmatrix}_{t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{**}} u_t + \underbrace{\frac{\sigma b}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{**}} w^0_{dt}, \\ z_t = \underbrace{a \begin{bmatrix} 1 & -2c & 1 \end{bmatrix}}_{H_{**}} x^*_t + v_t, \end{cases} \tag{5}$$

где $-a_3 = d$, $-a_2 = -1 - 2cd$, $-a_1 = d + 2c$, $a \triangleq 1 - d$, $b \triangleq \sqrt{1 - d^2}$, $c \triangleq \cos \omega_n \tau$, $d \triangleq e^{-\lambda\tau}$.

Доказательство. Найдем передаточную функцию канонической модели (1) относительно входа u_t по формуле $G(z) = H(Iz - F)^{-1}B$:

$$G(z) = \frac{(1-d)z^2 - 2c(1-d)z + (1-d)}{z^3 - (2c+d)z^2 + (2cd+1)z - d}. \tag{6}$$

Запишем матрицы H_{**} и F_{**} по определению 1 (c_0, c_1, c_2 — коэффициенты числителя, а a_0, a_1, a_2 — коэффициенты знаменателя передаточной функции $G(z)$):

$$H_{**} = (1-d)\begin{bmatrix} 1 & -2c & 1 \end{bmatrix}, \quad F_{**} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d & -(1+2cd) & d+2c \end{bmatrix}.$$

Пусть $G_{**} = [g_1, g_2, g_3]^T$, $G_1(z) = H(Iz - F)^{-1}G$ — передаточная функция канонической модели относительно входа w^0_{dt}, $G_2(z) = H_{**}(Iz - F_{**})^{-1}G_{**}$ — передаточная функция стандартной управляемой модели относительно входа w^0_{dt}. Для нахождения матрицы G_{**} воспользуемся свойством сохранения передаточной функции системы $G_1(z) = G_2(z)$.

Вычислим передаточные функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в числителях. Получим систему уравнений относительно g_1, g_2, и g_3

$$\begin{cases} \sigma\sqrt{1-d^2} = -2a_3cdg_1 - a_1dg_2 - a_2dg_1 + 2a_3cg_1 + a_3dg_2 + a_1g_2 + a_2g_1 - a_3g_2 - dg_3 + g_3, \\ -2c\sigma\sqrt{1-d^2} = 2a_1cdg_2 - 2a_1cg_2 - a_1dg_1 + a_2dg_2 + a_3dg_1 + 2cdg_3 + a_1g_1 - \\ \qquad - a_2g_2 - a_3g_1 - 2cg_3 - dg_2 + g_2, \\ \sigma\sqrt{1-d^2} = 2cdg_2 - 2cg_2 - dg_1 - dg_3 + g_1 + g_3, \end{cases}$$

решая которую, находим: $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = \dfrac{\sigma\sqrt{1-d^2}}{1-d} = \dfrac{\sigma b}{a}$.

Таким образом, мы нашли все неизвестные матрицы из определения 1, следовательно, модель 3dDSCM построена. ■

Исследуем свойство полной наблюдаемости построенной модели. Матрицу наблюдаемости вычислим по формуле $M_{DTI} = [H_{**}^T | F_{**}^T H_{**}^T | (F_{**}^2)^T H_{**}^T]^T$:

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} 1-d & -2c\,(1-d) & 1-d \\ d\,(1-d) & -2cd\,(1-d) & d\,(1-d) \\ d^2\,(1-d) & -2cd^3\,(1-d) & d^2\,(1-d) \end{bmatrix}, \quad d = e^{-\lambda\tau}, c = \cos(\omega_n\tau). \tag{7}$$

Так как λ и τ по определению не равны нулю, то $d \neq 1$, кроме того, $d > 0$ при всех значениях λ и τ. Поскольку вторая и третья строки матрицы M_{DTI} получаются из первой умножением соответственно на d и d^2, то $\operatorname{rank} M_{DTI} = 1$ и модель (5) не является полностью наблюдаемой. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Модель 3dDSCM не является полностью наблюдаемой при любых допустимых значениях параметров.

Замечание 2. Модель (5) по построению является полностью управляемой при любых допустимых значениях параметров. В этом легко убедиться, вычислив матрицу управляемости, которая в данном случае является нижнетреугольной с единицами на побочной диагонали.

Заключение

В статье исследованы свойства полной управляемости и наблюдаемости трехмерных дискретных линейных стохастических моделей суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека, заданных в пространстве состояний дискретными линейными стохастическими системами. Исследованы свойства полной наблюдаемости и управляемости канонической модели 3dDRCM в вещественном базисе, проведен анализ полной управляемости стандартной наблюдаемой модели 3dDSOM, выполнено построение и проведен анализ полной наблюдаемости стандартной управляемой модели 3dDSCM.

Результаты исследования показали, что свойством полной управляемости обладает только модель 3dDSCM (по построению). Свойством полной наблюдаемости при всех значениях параметров обладает только модель 3dDSOM (по построению), для модели 3dDRCM свойство полной наблюдаемости выполняется при условии $\tau \neq \frac{\pi k}{\omega_n}$, $k \in \mathbb{Z}$, а модель 3dDSCM не является полностью наблюдаемой при любых значениях параметров.

Список литературы

1. Kelly G. Body temperature variability (Part 1): a review of the history of body temperature and its variability due to site selection, biological rhythms, fitness, and aging // *Altern. Med. Rev.* 2006, v. 11, no. 4, p. 278–293.

2. Цыганов А.В., Цыганова Ю.В, Столярова И.В. Математическое и компьютерное моделирование суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека // *Теория и практика физической культуры.* 2019, № 2, с. 65–67.

3. Цыганов А.В., Цыганова Ю.В. Моделирование и обработка данных суточной термометрии // *Поволжский педагогический поиск.* 2020, № 1 (31), с. 143–149.

4. Semushin I.V., Tsyganova J.V., Skovikov A.G. Identification of a Simple Homeostasis Stochastic Model Based on Active Principle of Adaptation // *Proceedings of the International Conference "Applied Stochastic Models and Data Analysis ASMDA 2013 & DEMOGRAPHICS 2013", 25-28 June 2013 Mataro (Barcelona), Spain.* Barcelona: 2013. P. 775–783.

5. Кроливецкая Ю.М., Петрова Е.С. Построение стохастических моделей теплового гомеостаза человека // *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ.* 2014, № 1, с. 140–152.

6. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. *Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие.* Ульяновск: УлГТУ, 2007.

Analysis of the properties of controllability and observability of mathematical models of daily thermometry

Shugurova, M. A.

m.a.shugurova@gmail.com
Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia

The paper investigates the properties of complete controllability and observability of three-dimensional discrete linear stochastic models of daily thermometry of thermal homeostasis of a healthy person, given in the state space by discrete linear stochastic systems. The properties of the complete observability and controllability of the real-valued canonical model are investigated. The analysis of the complete controllability of the standard observable model is processed. The standard controllable model has been constructed. The analysis of the complete observability of the standard controllable model is carried out.

Keywords: *daily thermometry, thermal homeostasis, linear discrete stochastic system, complete controllability, complete observability.*