Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2022, № 1, с. 17–22.
Поступила: 10.05.2022
Окончательный вариант: 23.05.2022

УДК 681.5.015.4, 004.94

О квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора

Кувшинова А. Н.[1,*], ***Галушкина Д. В.***[2]

*kuvanulspu@yandex.ru
[1]УлГПУ им. И.Н. Ульянова, Ульяновск, Россия
[2]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассматривается задача построения квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора для одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий дискретной линейной стохастической системы в пространстве состояний. В отличие от решения, предложенного ранее другими авторами, полученная модификация записывается в исходной ковариационной форме.

Ключевые слова: *дискретная линейная стохастическая система, алгоритм Гиллейнса – Де-Мора, квадратно-корневой алгоритм.*

Введение и постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему в пространстве состояний

$$
\begin{cases}
c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, & (1)\\
z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, & (2)
\end{cases}
$$

где (1) — уравнение (модель) объекта/процесса, $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий (управления), $w_k \in \mathbb{R}^q$ — шум в объекте, $F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — переходная матрица состояния, $B_k \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрица входного воздействия, $G_k \in \mathbb{R}^{n\times q}$ — передаточная матрица шума; (2) — уравнение (модель) зашумленных измерений, $z_k \in \mathbb{R}^m$ —

вектор измерений, $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — шум в измерителе, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица измерений; начальное состояние $c_0 \sim \mathcal{N}(\bar{c}_0, \Pi_0)$; шумы w_k и ξ_k образуют независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $Q_k \geq 0$ и $R_k > 0$.

Одной из наиболее известных и актуальных задач для систем (1), (2) является задача оценивания вектора состояния c_k по результатам зашумленных измерений. Однако, при решении многих прикладных задач, например, в геофизике [1], вектор входных воздействий u_k также является неизвестным, что усложняет получение оптимальных оценок вектора состояния. Решение данной задачи рассматривается в литературе с помощью различных подходов. Первый подход предполагает, что известна модель динамического процесса для неизвестного входа. В этом случае для решения задачи может использоваться расширенный фильтр Калмана. Чтобы уменьшить его вычислительные затраты, в [2] был предложен двухступенчатый фильтр Калмана, в котором оценка состояния и неизвестного входа разделены. Второй подход рассматривает случай, когда нет априорной информации об эволюции неизвестного входа. В работе [3] был предложен алгоритм для совместной оценки вектора и входных воздействий.

При решении практических задач с использованием компьютера предпочтительнее использовать реализации фильтра Калмана с квадратным корнем и UD-реализации, которые численно устойчивы к ошибкам машинного округления, вместо стандартной формы алгоритмов калмановского типа [4]. Целью данной работы является получение квадратно-корневой модификации алгоритма [3].

1. Алгоритм Гиллейнса – Де-Мора

Алгоритм Гиллейнса – Де-Мора [3], являющийся обобщением результатов, полученных ранее в работах [1], [5], предназначен для одновременного оценивания векторов состояния и неизвестного входного воздействия, при этом никакой априорной информации о входном воздействии не требуется.

Алгоритм состоит из трех последовательных этапов, повторяемых в цикле:

1) обновление оценки вектора состояния по времени;
2) оценка вектора неизвестного входного воздействия;
3) обновление оценки вектора состояния по измерениям.

В работе [3] рассмотрены два варианта алгоритма, в которых этапы 1 и 2 совпадают, а этапы 3 различаются. В первом варианте на этапе 2 получается MVU-оценка (MVU — minimum-variance unbiased) вектора входных воздействий $\hat{u}_{k-1}$, а на этапе 3 — несмещенная оценка вектора состояния $\hat{c}_k$. Во втором варианте алгоритма на этапе 3 за счет более сложных вычислений получается MVU-оценка вектора состояния.

Рассмотрим первую версию алгоритма. Предположим, что для любого k выполняется условие

$$\operatorname{rank} H_k B_{k-1} = \operatorname{rank} B_{k-1} = r, \tag{3}$$

тогда алгоритм может быть сформулирован следующим образом (алгоритм 1).

Алгоритм 1. Алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий (S. Gillijns, B. De Moor [3])

Вход: $\bar{c}_0$, Π_0

$\hat{c}_0 = \bar{c}_0$, $P_0 = \Pi_0$ // Инициализация

for $k = 1, 2, \dots, K$ **do**

// Прогноз оценки вектора состояния

$\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{c}_{k-1}$

$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1}$

// Оценка вектора входных воздействий

$\tilde{R}_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$

$D_{k-1} = (B_{k-1}^T H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k B_{k-1})^{-1}$

$M_k = D_{k-1} B_{k-1}^T H_k^T \tilde{R}_k^{-1}$

$\hat{u}_{k-1} = M_k(z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1})$

// Коррекция оценки вектора состояния

$K_k = P_{k|k-1} H_k^T \tilde{R}_k^{-1}$

$\hat{c}_k^* = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1}\hat{u}_{k-1}$

$P_k^* = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$

$\hat{c}_k = \hat{c}_k^* + K_k(z_k - H_k \hat{c}_k^*)$

$P_k = P_k^* + (I - K_k H_k) B_{k-1} D_{k-1} B_{k-1}^T (I - K_k H_k)^T$

end for

Выход: $\hat{c}_k, P_k, \hat{u}_{k-1}, D_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, K$

2. Квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора

Основная идея квадратно-корневых модификаций алгоритмов фильтрации калмановского типа заключается в представлении положительно определенных матриц, в частности, ковариационной матрицы ошибок оценивания, в виде $P_k = S_k S_k^T$, где S_k — "квадратный корень" матрицы P_k, являющийся нижней треугольной матрицей. Такое представление может быть получено, например, с помощью разложения Холецкого [4]. На каждом этапе квадратно-корневого алгоритма обновление основных величин фильтра выполняется при помощи ортогональных преобразований, применяемых к матричным массивам, содержащим все нужные для расчетов величины, а результаты вычислений также получаются в матричных массивах.

В работе [6] получена информационная форма алгоритма 1 и на ее основе построен квадратно-корневой алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий, причем полученный алгоритм сформулирован в так называемой "расширенной" форме, то есть оценки для векторов состояния и входных воздействий получаются в матричных массивах одновременно с ковариационными матрицами ошибок оценивания. Кроме того, в указанной работе показано, что построение аналогичного расширенного квадратно-корневого алгоритма на основе ковариационной формы алгоритма 1 невозможно.

Тем не менее, можно построить нерасширенную квадратно-корневую версию алгоритма 1, в которой оценки векторов состояния и входных воздействий, а также некоторые вспомогательные вычисления, выполняются отдельно.

Алгоритм 2. Квадратно-корневой ковариационный алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий

Вход: $\bar{c}_0$, Π_0

$\hat{c}_0 = \bar{c}_0$, $S_{P_0} = \mathrm{chol}(\Pi_0)$ // Инициализация

for $k = 1, 2, \ldots, K$ **do**

// Прогноз оценки вектора состояния

$\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{c}_{k-1}$

$S_{Q_{k-1}} = \mathrm{chol}(Q_{k-1})$

$$\begin{bmatrix} S^T_{P_{k|k-1}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_1 \begin{bmatrix} S^T_{P_{k-1}} F^T_{k-1} \\ S^T_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}$$

// Оценка вектора входных воздействий

$S_{R_k} = \mathrm{chol}(R_k)$

$$\begin{bmatrix} S^T_{\tilde{R}_k} & \bar{K}^T_k \\ 0 & S^T_{P^*_k} \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_2 \begin{bmatrix} S^T_{R_k} & 0 \\ S^T_{P_{k|k-1}} H^T_k & S^T_{P_{k|k-1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S^{-T}_{D_{k-1}} \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_3 \begin{bmatrix} S^{-T}_{\tilde{R}_k} H_k B_{k-1} \end{bmatrix}$$

$M_k = S_{D_{k-1}} S^T_{D_{k-1}} B^T_{k-1} H^T_k S^{-T}_{\tilde{R}_k} S^{-1}_{\tilde{R}_k}$

$\hat{u}_{k-1} = M_k(z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1})$

// Коррекция оценки вектора состояния

$K_k = \bar{K}_k S^{-1}_{\tilde{R}_k}$

$\hat{c}^*_k = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1}\hat{u}_{k-1}$

$\hat{c}_k = \hat{c}^*_k + K_k(z_k - H_k \hat{c}^*_k)$

$$\begin{bmatrix} S^T_{P_k} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_4 \begin{bmatrix} S^T_{P^*_k} \\ S^T_{D_{k-1}} B^T_k (I_n - K_k H_k)^T \end{bmatrix}$$

end for

Выход: $\hat{c}_k, S_{P_k}, \hat{u}_{k-1}, S_{D_{k-1}},\ k = 1, 2, \ldots, K$

На этапе инициализации и в основном цикле алгоритма разложение матриц Π_0, Q_{k-1} и R_k осуществляется с помощью алгоритма Холецкого. Справедливо следующее

Утверждение 1. *Алгоритмы 1 и 2 алгебраически эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим матричное ортогональное преобразование

$$\mathcal{Q}A = R.$$

Доказательство основано на проверке матричного равенства

$$A^T \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} A = A^T I A = A^T A = R^T R,$$

где I – единичная матрица.

Докажем эквивалентность этапов прогноза оценки вектора состояния обоих алгоритмов. Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$, $A = \begin{bmatrix} F_{k-1} S_{P_{k-1}} & S_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}^T$, $R = \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}} & 0 \end{bmatrix}^T$.

Требуется доказать, что при $A^T A = R^T R$ получим выражение в строке 4 алгоритма 1.

Вычислим

$$A^T A = \begin{bmatrix} F_{k-1} S_{P_{k-1}} & S_{Q_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T \\ S_{Q_{k-1}}^T \end{bmatrix} = F_{k-1} S_{P_{k-1}} S_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T + S_{Q_{k-1}} S_{Q_{k-1}}^T$$
$$= F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1}.$$

$$R^T R = \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T \\ 0 \end{bmatrix} = S_{P_{k|k-1}} S_{P_{k|k-1}}^T = P_{k|k-1}.$$

Получим

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1},$$

что и требовалось доказать.

Эквивалентность остальных этапов алгоритмов доказывается аналогично. □

Заключение

В работе рассмотрена квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора [3], предназначенная для одновременного оценивания неизвестных векторов состояния и входных воздействий дискретной линейной стохастической системы. В отличие от результатов [6], получена ковариационная версия алгоритма. Доказана алгебраическая эквивалентность нового квадратно-корневого и существующего ранее стандартного алгоритмов.

Дальнейшие исследования будут направлены на экспериментальную проверку и изучение свойств полученного алгоритма при решении прикладных задач, в частности, идентификации граничных условий в моделях конвективно-диффузионного переноса [7], [8].

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта № 19-41-730009.

Список литературы

1. Kitanidis P.K. Unbiased minimum-variance linear state estimation // *Automatica.* — 1987. — Vol. 23, no. 6. — P. 775–778.

2. Friedland, B. Treatment of bias in recursive filtering / IEEE Transactions Control. — 1969. — Vol. 14. — P. 359–367.

3. Gillijns S., Moor B.D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica.* — 2007. — V. 43. — P. 111–116.

4. Grewal, M.S., Andrews A.P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab. 4nd Edition. — New York : John Wiley & Sons, Inc., 2015.

5. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenious inputs // *Automatica.* 1997. — Vol. 33, no. 4. — P. 717–719.

6. Gillijns, S., Haverbeke, N., Moor B.D. Information, covariance and square-root filtering in the presence of unknown inputs // 2007 European Control Conference (ECC). — 2007. — P. 2213–2217.

7. Tsyganov A.V., Tsyganova Yu.V., Kuvshinova A.N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model subject to noisy measurements // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2019. — Vol. 1368. — P. 042029.

8. Кувшинова А.Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал Средневолжского Математического Общества.* — 2019. — Т. 21, № 4. — С. 469–479.

On the square-root modification of the Gillijns – De Moor algorithm

Kuvshinova, A. N.[1,*], ***Galushkina, D. V.***[2]

[*]kuvanulspu@yandex.ru

[1]Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia

[2]Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

This paper considers the problem of constructing a square-root modification of the S. Gillijns and B. D. Moor algorithm for simultaneous estimation of the state and the input of a discrete linear stochastic system in a state space. In contrast to the solution proposed earlier by other authors, the obtained modification is written in the original covariance form.

Keywords: *discrete linear stochastic system, Gillijns – De Moor algorithm, square-root algorithm.*