



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2022, № 1, с. 43-55.

Поступила: 10.06.2022

Окончательный вариант: 10.06.2022

© УлГУ

УДК 519.6

## Построение и анализ четырехмерных моделей динамики популяций с учетом миграционных потоков

*Петров А.А.<sup>1,\*</sup>, Дружинина О.В.<sup>2</sup>,  
Масина О.Н.<sup>1</sup>, Васильева И.И.<sup>1</sup>*

[\\*xeal91@yandex.ru](mailto:xeal91@yandex.ru)

<sup>1</sup>ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, Россия

<sup>2</sup>ФИЦ ИУ РАН, ИПУ РАН, Москва, Россия

---

Направление, связанное с исследованием многомерных моделей популяционной динамики, является актуальным в связи с недостаточной изученностью нелинейных моделей размерности  $n$  ( $n > 3$ ) и в связи с прикладной значимостью для описания экосистем. Предложено формализованное описание четырехмерной модели популяционной динамики с учетом конкуренции и миграционных потоков. Сформулирована и решена оптимизационная задача поиска параметров модели, обеспечивающих сосуществование популяций в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов. Рассмотренный в рамках оптимизационной задачи критерий качества обеспечивает выполнение условий сосуществования популяций. С целью решения задачи оптимизации разработан эволюционный алгоритм поиска. Для предложенной популяционно-миграционной модели изучено качественное поведение, построены проекции фазовых портретов, найдены траектории при различных наборах параметров модели. Дан сравнительный анализ результатов численных экспериментов по поиску модельных траекторий. Вычислительные эксперименты выполнены с помощью разработанного программного комплекса. Полученные результаты могут найти применение при моделировании экологических, социально-экономических, демографических и физико-химических процессов.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, системы дифференциальных уравнений, модели популяционной динамики, конкуренция, миграционные потоки, динамика траекторий, численные методы оптимизации, дифференциальная эволюция, компьютерные эксперименты

## Введение

Исследование популяционных динамических моделей с миграцией является актуальной проблемой. Необходимость анализа качественного поведения и исследования динамики траекторий популяционных моделей связана с появлением новых проблем в изучении свойств многомерных экологических и демографических систем с учетом миграционных потоков. Известно, что возникновение различных качественных эффектов в таких системах может быть связано с влиянием миграции. Ряд аспектов построения и исследования моделей с миграцией изучен в [1–3]. В [2–4] рассматривались миграционные потоки в детерминированных популяционных моделях. Анализ распределенных многомерных популяционных моделей с учетом перекрестной миграции проводился, например, в [5–7]. В [3,8,9] изучались вопросы качественного поведения и устойчивости популяционно-миграционных моделей. В [9] разработано методическое обеспечение анализа и синтеза многомерных нелинейных динамических моделей, описывающих миграционные потоки при воздействии широкополосных параметрических и аддитивных шумов. В [10–12] выполнен качественный анализ трехмерных детерминированных и стохастических моделей с конкуренцией и миграцией.

Моделирование популяционно-миграционных систем осуществляется с применением различных программных средств, обладающих достаточно эффективным набором инструментов для построения компьютерных моделей и проведения вычислительных экспериментов. Тем не менее, некоторые программные продукты не располагают библиотеками для численно-символьных расчетов и не обладают достаточной вычислительной сложностью. В связи с этим в ходе исследования моделей популяционно-миграционных систем актуальным целесообразно привлекать прикладные математические пакеты и языки программирования общего назначения [13,14].

Компьютерное моделирование с использованием прикладных пакетов позволяет получать результаты в случае достаточно высокой размерности и делает возможным увеличение количество фазовых переменных. В [15] изучено несколько типов четырехмерных моделей с миграционными потоками. Проведен сравнительный анализ результатов компьютерного исследования, полученных для трехмерной и четырехмерной стохастических моделей с миграционными потоками. Дано сравнение качественных свойств четырехмерных моделей с учетом изменения скоростей миграции, а также коэффициентов внутривидового и межвидового взаимодействия.

Трехмерная управляемая модель с конкуренцией и миграцией рассматривалась в [16]. Критерий качества управления для указанной модели рассмотрен в рамках задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Компьютерное исследование нелинейной модели с конкуренцией и миграцией позволило получить результаты численных экспериментов по поиску законов управления, критерия качества управления и оптимальных траекторий. В настоящей работе рассматривается неуправляемый случай, однако размерность модели с конкуренцией и миграцией является более высокой, чем в [16].

Теоретический и практический интерес представляет задача интеллектуального поиска таких параметров математической модели, которые обеспечивают сосуществование всех взаимодействующих видов сообщества при заданных оптимизационных ограничениях. В этой задаче важными аспектами являются выяснение характера траекторий и переход к стационарному режиму. В этой связи отметим, что предложенный в [17] подход к компьютерному исследованию моделей, базирующийся на использовании методов параметрической оптимизации и интеллектуального анализа данных [18–20], можно применять для различных моделей популяционной динамики.

Настоящая работа посвящена построению и анализу четырехмерных моделей динамики популяций с учетом миграционных потоков. При описании указанных моделей учитываются межвидовая конкуренция в двух популяциях и двунаправленная миграция обеих популяций. В разделе 1 предложено построение модели «конкурент–конкурент» с двунаправленной миграцией (в два убежища). В разделе 2 проведен поиск модельных параметров с помощью эволюционного алгоритма. Сформулирована оптимизационная задача поиска параметров модели, обеспечивающих сосуществование популяций в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов. В разделе 3 проведено качественное исследование четырехмерной модели, в частности, найдены состояния равновесия, построены проекции фазовых портретов, изучена динамика траекторий. Осуществлен численный поиск компонент положительных состояний равновесия, результаты которого согласуются с решением оптимизационной задачи раздела 2. В разделе 4 приведено содержание и обсуждение результатов численных экспериментов, связанных с поиском различных траекторий. Дано сравнение качественных свойств четырехмерных моделей с учетом изменения различных параметров модели, в частности, коэффициентов внутривидового и межвидового взаимодействия, коэффициентов миграции. В качестве инструментального программного средства исследования моделей использован программный комплекс, разработанный на языке Python с использованием библиотек `numpy`, `sympy`, `scipy`, а также на языке Julia с применением пакета `BlackBoxOptim.jl`.

## 1. Построение четырехмерных моделей с конкуренцией и миграцией

Одной из базовых миграционно-популяционных моделей с учетом конкуренции и миграционных потоков является трехмерная модель, которая описывает динамику двух взаимосвязанных сообществ, причем первый вид мигрирует в другой ареал, а в первом ареале конкурирует со вторым видом. Указанная популяционно-миграционная модель, а также ее некоторые модификации изучались в [3, 9, 10–12, 15].

Опишем далее четырехмерную модель, в которой учитывается влияние межвидовой конкуренции в двух популяциях с двунаправленной миграцией обеих популяций. Указанная модель задается системой уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 - p_{11}x_1^2 - p_{13}x_1x_3 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2x_2 - p_{22}x_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3x_3 - p_{33}x_3^2 - p_{31}x_1x_3 + \varepsilon x_4 - \delta x_3,\end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = a_4x_4 - p_{44}x_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4, \quad (1)$$

где  $x_1$  и  $x_3$  – плотности популяций конкурирующих видов в первом ареале,  $x_2$  – плотность популяции во втором ареале (в первом убежище),  $x_4$  – плотность популяции в третьем ареале (во втором убежище),  $p_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – коэффициенты межвидовой конкуренции,  $p_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты внутривидовой конкуренции,  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – коэффициенты естественного прироста,  $\beta, \gamma$  – коэффициенты миграции вида между первым и вторым ареалами, при этом второй ареал является убежищем,  $\delta, \varepsilon$  – коэффициенты миграции вида между первым и третьим ареалами, при этом третий ареал является убежищем.

Перейдем к частному случаю модели (1), когда  $p_{13}=p_{31}=r$ ,  $p_{11}=p_{22}=p_{33}=p_{44}=p$ ,  $a_1=a_2=a_3=a_4=a$ ,  $\beta = \gamma$ ,  $\varepsilon = \delta$ . В этом случае модель (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - px_1^2 - rx_1x_3 + \beta x_2 - \beta x_1, \\ \dot{x}_2 &= ax_2 - px_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 - px_3^2 - rx_1x_3 + \delta x_4 - \delta x_3, \\ \dot{x}_4 &= ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \delta x_4. \end{aligned} \quad (2)$$

Указанный переход к модели вида (2) позволяет упростить решение ряда задач, в частности, осуществить поиск параметров с помощью эвристических оптимизационных алгоритмов, а также провести сравнительный анализ влияния параметров системы на динамику модели.

## 2. Поиск модельных параметров с помощью эволюционного алгоритма

Несмотря на сложность аналитического поиска положительных состояний равновесия четырехмерных динамических моделей, результаты для системы (2) свидетельствуют о возможности сосуществования популяций. Сформулируем оптимизационную задачу поиска параметров модели, обеспечивающих сосуществование популяций в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов. Данная задача сводится к численному поиску эвентуальных состояний равновесия для системы (2). Под эвентуальным состоянием равновесия в настоящей работе понимается состояние равновесия, которое существует при выполнении определенных условий.

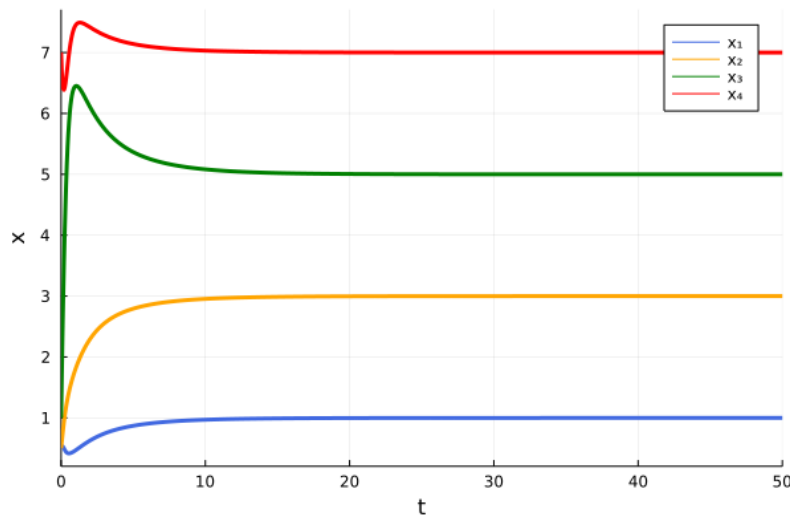
Пусть система (2) при определенных параметрах имеет положительное состояние равновесия  $S^* = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4]$ , которое представляет собой устойчивый узел в фазовом пространстве. Тогда необходимо найти такие значения параметров  $(a, p, r, \beta, \delta) \in R_+^5$ , которые идентифицируют систему (2) в качестве системы с положительным состоянием равновесия  $S^*$ .

Мы предлагаем алгоритм поиска параметров на основе эволюционных алгоритмов оптимизации. Идея указанного алгоритма заключается в минимизации численного критерия, характеризующего устойчивость заданного состояния равновесия системы (2) и отклонение от него. Указанный критерий имеет вид:

$$\frac{1}{n(s_1 - s_0)} \sum_{i=s_0}^{s_1} \|x_i - S^*\|,$$

где  $n$  – количество траекторий с учетом различных начальных условий,  $s_1$  – номер последнего шага алгоритма расчета траектории ОДУ,  $s_0$  – номер начального шага алгоритма расчета траектории ОДУ,  $x_i$  – фазовый вектор системы (7) на  $i$ -м шаге.

Для реализации алгоритма поиска параметров разработана программа на языке Julia с применением алгоритма дифференциальной эволюции [18,19] из состава пакета BlackBoxOptim.jl. С целью поиска траекторий проведен вычислительный эксперимент для  $S^* = (1, 3, 5, 7)$ ,  $n = 3$ ,  $s_0 = \frac{2s_1}{3}$ ,  $0 < s_1 < 10000$ . Полученные значения параметров  $(a, p, r, \beta, \delta) = (4.656449, 0.582056, 2.561047, 4.365420, 2.037197)$ . Соответствующий результат с учетом начальных условий  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.5, 0.5, 1, 7)$  приведен на рис. 1.



**Рис. 1.** Траектории решений для системы (2) при  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.5, 0.5, 1, 7)$  для найденного состояния равновесия  $S^*$

Вычислительные эксперименты, которые проведены с учетом варьирования начальных условий, показывают, что состояние равновесия  $S^* = (1, 3, 5, 7)$  имеет характер устойчивого узла. Исходя из результатов экспериментальных исследований, модель (2) можно конкретизировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - px_1^2 - rx_1x_3 + \beta x_2 - \beta x_1, \\ \dot{x}_2 &= ax_2 - px_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 - px_3^2 - rx_1x_3 + \delta x_4 - \delta x_3, \\ \dot{x}_4 &= ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \delta x_4, \\ a &= 4.656449, \quad p = 0.582056, \\ r &= 2.561047, \quad \beta = 4.365421, \delta = 2.037196. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в [21] рассмотрены трехмерные модели популяционной динамики с учетом трофических цепей и конкурентных отношений, причем изучены случаи наличия нескольких положительных состояний равновесия. Размерность модели позволила получить результаты в аналитическом виде. Для модели (3) по аналогии с [21] целесообразно рассмотреть существование нескольких положительных состояний равновесия.

Рассмотрим гипотезу о существовании отличных от  $S^*$  положительных особых точек для системы (3). Для проверки данной гипотезы разработана программа на языке Julia для численного поиска особых точек для системы (3) в диапазоне от (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) до (40,40,40,40). В результате получены дополнительные особые точки:

$$S_1^* = (1.419182, 3.522058, 4.021355, 6.624613), S_2^* = (5.788148, 6.843452, 0.813469, 5.062408).$$

В результате серии вычислительных экспериментов получено, что  $S_2^*$  по аналогии с  $S^*$  имеет характер устойчивого узла. В свою очередь,  $S_1^*$  обладает свойствами такого неустойчивого узла, который лежит на границе областей притяжения  $S^*$  и  $S_2^*$ .

Подход к поиску параметров модели с целью получения положительных состояний равновесия базируется на методах интеллектуального поиска и позволяет найти численные значения компонент положительных состояний равновесия при заданных начальных условиях, а также идентифицировать соответствующие параметры системы.

### 3. Исследование четырехмерной популяционно-миграционной модели

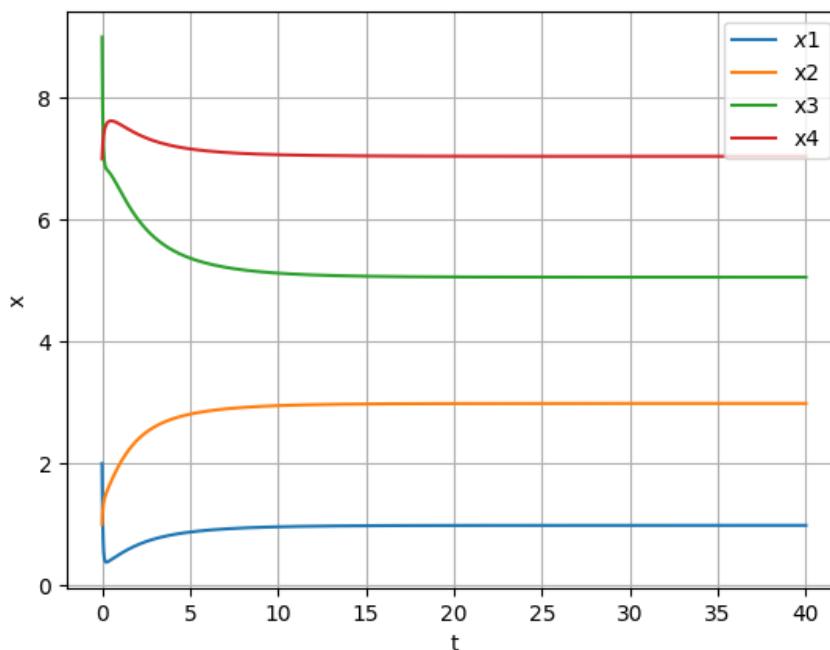
Качественный и численный анализ четырехмерной популяционно-миграционной модели предполагает, в частности, поиск состояний равновесия, построение фазовых портретов и изучение динамики траекторий. Размерность модели и возможности использованного в ходе исследования прикладного программного обеспечения позволяют получить только часть решений алгебраической системы, получаемой приравнением к нулю правых частей уравнений модели (2). С помощью библиотеки sympy языка программирования Python получены следующие особые точки:

$$\begin{aligned} & S_1(0, 0, 0, 0), S_2\left(0, 0, \frac{a}{p}, \frac{a}{p}\right), S_3\left(\frac{a}{p}, \frac{a}{p}, 0, 0\right), \\ & S_4\left(0, 0, \frac{a-2\delta-\sqrt{a^2-4\delta^2}}{2p}, \frac{a-2\delta+\sqrt{a^2-4\delta^2}}{2p}\right), \\ & S_5\left(0, 0, \frac{a-2\delta+\sqrt{a^2-4\delta^2}}{2p}, \frac{a-2\delta-\sqrt{a^2-4\delta^2}}{2p}\right), \\ & S_6\left(\frac{a-2\beta-\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2p}, \frac{a-2\beta+\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2p}, 0, 0\right), \\ & S_7\left(\frac{a-2\beta+\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2p}, \frac{a-2\beta-\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2p}, 0, 0\right). \end{aligned}$$

В вычислительном пакете для заданного набора параметров  $(a, p, r, \beta, \delta) = (4.66, 0.58,$

2.56, 4.37, 2.04) численно найдены дополнительные положительные состояния равновесия:  $S_8(0.99, 2.99, 5.06, 7.04)$ ,  $S_9(1.44, 3.55, 4.00, 6.64)$ ,  $S_{10}(5.81, 6.87, 0.81, 5.08)$ . Полученные значения согласуются с проведенным во втором разделе вычислительным экспериментом.

Построены траектории для модели (2) при выбранных наборах параметров. Соответствующий результат с учетом начальных условий  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2, 1, 9, 7)$  приведен на рис. 2. Следует отметить, что популяции конкурентов  $x_1$  и  $x_3$  выходят на стационарный режим. Популяция  $x_1$  характеризуется более низкими значениями плотности по сравнению с остальными тремя популяциями. При этом наблюдается также стационарный режим.



**Рис. 2.** Траектории решений для системы (2) при  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2, 1, 9, 7)$ ,  $(a, p, r, \beta, \delta) = (4.66, 0.58, 2.56, 4.37, 2.04)$

На рис. 3 предложена проекция фазового портрета на плоскость  $(x_1, x_2)$  с учетом  $x_3=x_4=0$ . Из рисунка видно, что ветви графика сходятся к одной точке. Вид проекции соответствует характеру устойчивого узла.

На рис. 4 приведена для наглядности проекция фазового портрета в плоскости  $(x_1, x_2)$  в окрестности точки  $S_3\left(\frac{a}{p}, \frac{a}{p}, 0, 0\right)$  при выбранном наборе параметров с учетом увеличенного диапазона изменения фазовых переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Здесь также прослеживается характер устойчивого узла.

Проведенный в настоящем разделе анализ состояний равновесия не может быть всеобъемлющим по причинам, связанным с затруднениями вычислительного характера при



исследовании четырехмерной динамической модели, но полученные результаты можно использовать для сравнения с траекториями, полученными в результате варьирования отдельных параметров модели.

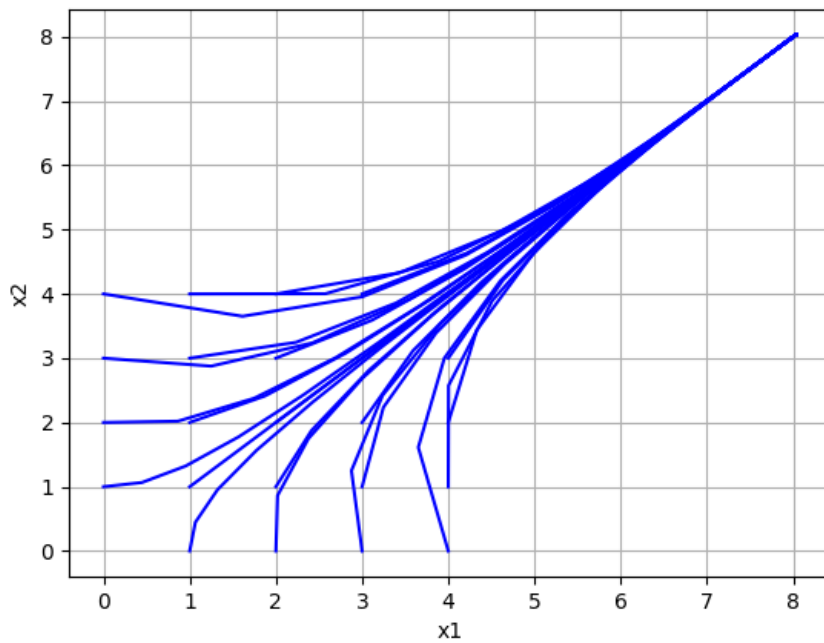


Рис. 3. Проекция фазового портрета на плоскость  $(x_1, x_2)$  с учетом  $x_3=x_4=0$

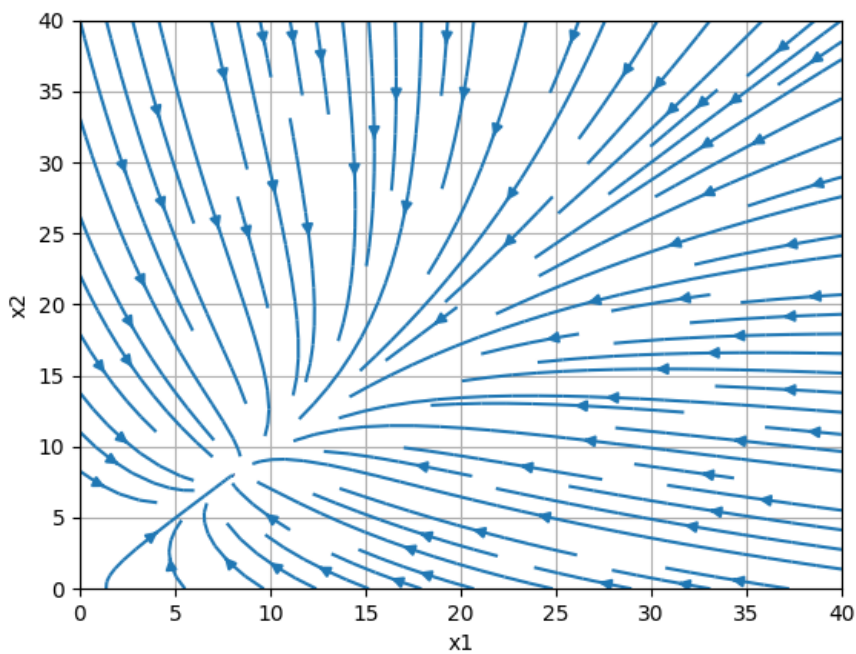


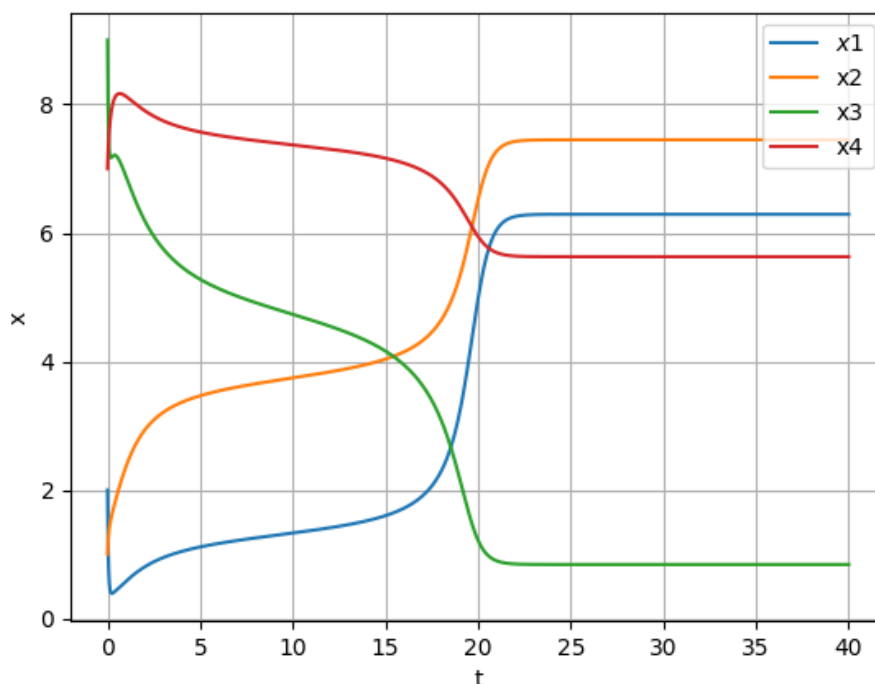
Рис. 4. Проекция векторного поля на плоскость  $(x_1, x_2)$  с учетом  $x_3=x_4=0$



#### 4. Результаты численных экспериментов по сравнительному анализу траекторной динамики

В соответствии с разделами 2 и 3 будем использовать параметры и начальные условия вычислительного эксперимента в следующем виде:  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2, 1, 9, 7)$ ,  $(a, p, r, \beta, \delta) = (4.66, 0.58, 2.56, 4.37, 2.04)$ .

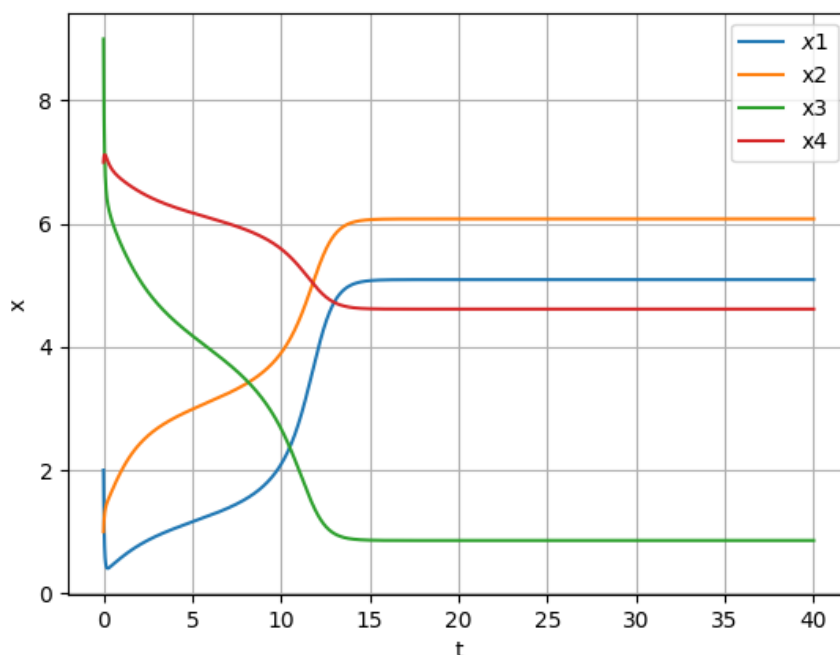
Сначала варьируется параметр  $a$  естественного прироста популяции, а все остальные параметры и начальные условия оставим прежними. Соответствующие траектории для модели (2) представлены на рис. 5.



**Рис 5.** Траектории решений для системы (2) при  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2, 1, 9, 7)$ ,  $(a, p, r, \beta, \delta) = (5.00, 0.58, 2.56, 4.37, 2.04)$

Согласно данному набору параметров, первый конкурирующий вид (ему соответствует переменная  $x_1$ ) оказывается в более благоприятном положении по сравнению со вторым конкурирующим видом (переменная  $x_3$ ). В условиях убежища плотность популяции  $x_2$  растет, и все точки выходят на стационарный режим, что представлено на рис. 5.

Далее варьируется параметр  $p$  внутривидовой конкуренции, а все остальные параметры и начальные условия оставим прежними. Построим график динамики (рис. 6).



**Рис.6.** Траектории решений для системы (2) при  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2, 1, 9, 7)$ ,  $(a, p, r, \beta, \delta) = (4.66, 0.65, 2.56, 4.37, 2.04)$

Согласно рис. 6, между плотностями популяций  $x_1$  и  $x_4$  имеются небольшие различия, а плотность популяции  $x_3$  резко уменьшается. Система (2) после достаточно резкого изменения значений выходит на стационарный режим.

Эксперименты демонстрируют, что варьирование остальных трех параметров не оказывает существенного влияния на динамику траекторий. Таким образом, при рассматриваемых наборах параметров качественное поведение траекторий при изменении скоростей миграции (коэффициентов  $\beta$  и  $\delta$ ) в первый и во второй ареал соответственно, а также при изменении коэффициента межвидовой конкуренции  $r$  практически не изменяется по сравнению с рис. 2.

В результате сравнительного анализа выявлено, что изменение параметров воспроизводства популяций и внутривидовой конкуренции оказывают существенное влияние на динамику траекторий. Выход на стационарный режим происходит после увеличения плотности популяции первого конкурирующего вида и уменьшения плотности популяции второго конкурирующего вида.

## Заключение

В статье рассмотрен подход к исследованию четырехмерных популяционно-миграционных моделей на основе численных методов глобальной оптимизации и решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а также символьных вычислений. Решение оптимизационной задачи поиска параметров модели в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов позволило идентифицировать модель, для которой выполнены условия существования положительных состояний равновесия.

Сравнительный анализ результатов численных экспериментов по поиску траекторий направлен на оценку влияния различных параметров и на выявление качественных эффектов, характерных для моделей с миграционными потоками. Указанный анализ выявил существенное влияние параметров воспроизводства популяций и внутривидовой конкуренции на динамику траекторий при рассмотренных наборах коэффициентов.

В качестве перспективных направлений исследований можно отметить изучение управляемых четырехмерных моделей с конкуренцией и миграцией, анализ возможностей поиска положительных состояний равновесия в аналитическом виде, а также оценка влияния стохастизации на динамику моделей.

## Список литературы

1. Tkachenko N., Weissmann J.D., Petersen W.P., Lake G., Zollikofer C.P.E., Callegari S. Individual-based modelling of population growth and diffusion in discrete time // *PLoS ONE*. 2017. 2(4): e0176101. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176101>
2. Tuckwell H.C. A study of some diffusion models of population growth // *Theoretical population biology*. 1974. V. 5. P. 345–357.
3. Zhang Xin-an, Chen Lansun. The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka–Volterra model // *Nonlinear Analysis*. 2007. V. 66. P. 2767–2776.
4. Свирежев Ю.М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*. М.: Наука, 1987.
5. Cui J., Chen L. The effect of diffusion on the time varying logistic population growth // *Computers & Mathematics with Applications*. 1998. V. 36. P. 1–9.
6. Chen L., Jüngel A. Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion // *SIAM J. Math. Anal.* 2004. V. 36. P. 301–322.
7. Wen Z., Fu S. Global solutions to a class of multi-species reaction-diffusion systems with cross-diffusions arising in population dynamics // *J. Comput. Appl. Math.* 2009. V. 230. № 2. P. 34–43.
8. Lu Z., Takeuchi Y. Global asymptotic behaviour in single-species discrete diffusion systems // *J. Math. Biol.* 1993. V. 32. P. 67–77.
9. Синицын И.Н., Дружинина О.В., Масина О.Н. Аналитическое моделирование и анализ устойчивости нелинейных широкополосных миграционных потоков // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16. № 3. С. 3–16.
10. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M., Masina O.N. Construction and analysis of nondeterministic models of population dynamics // *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*. V. 678. Springer, 2016. P. 498–510.

11. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Design and stability analysis of nondeterministic multidimensional populations dynamics models // *CEUR Workshop Proceedings*. 2017. V. 1995. P. 14 – 21. (Proceedings of the Selected Papers of the 7th International Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems" (ITTMM-2017). Moscow, Russia, April 24, 2017).
12. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Tarova E.D. Computer research of nonlinear stochastic models with migration flows // *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. V. 2407. P. 26–37. (Proceedings of the Selected Papers of the 9th International Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems" (ITTMM-2019)). Moscow, Russia, 2019).
13. Lamy R. *Instant SymPy Starter*. Packt Publishing, 2013.
14. Oliphant T.E. Python for scientific computing // *Computing in Science and Engineering*. 2007. V. 9. No. 3. P. 10–20.
15. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Tarova E.D. Computer research of nonlinear stochastic models with migration flows // *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. V. 2407. P. 26–37. (Proceedings of the Selected Papers of the 9th International Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems" (ITTMM-2019)). Moscow, Russia, 2019).
16. Петров А.А., Дружинина О.В., Масина О.Н., Щербаков А.В. Задача поиска оптимальных траекторий для управляемой популяционной модели, учитывающей конкуренцию и миграцию // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. УлГУ. Электрон. журн. 2020. № 2. С. 41–54.
17. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Synthesis and computer study of population dynamics controlled models using methods of numerical optimization, stochasticization and machine learning // *Mathematics*. 2021. V. 9. Iss. 24. 3303.
18. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *Journal of Global Optimization*. 1997. V. 11. P. 341–359.
19. Lampinen J.A. Constraint handling approach for the differential evolution algorithm // In: *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation, CEC'02 (Cat. No. 02TH8600)*, volume 2, IEEE, 2002.
20. Witten H., Frank E., Hall M. A. *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*, 3rd. ed., Morgan Kaufmann, 2011.
21. Hutson V., Vickers G.T. A criterion for permanent coexistence of species, with an application to a two-prey one-predator system // *Math. Biosci.* 1983. V. 63. P. 253–269.

# The construction and analysis of four-dimensional models of population dynamics taking into account migration flows

*Petrov, A.A.<sup>1,\*</sup>, Druzhinina, O.V.<sup>2</sup>, Masina, O.N.<sup>1</sup>, Vasilyeva, I.I.<sup>1</sup>*

\* [xeal91@yandex.ru](mailto:xeal91@yandex.ru)

<sup>1</sup>I.A. Bunin Elets State University, Elets, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow

The direction associated with the study of multidimensional models of population dynamics is relevant due to the lack of knowledge of nonlinear models of dimension  $n$  ( $n > 3$ ) and in connection with the applied significance for describing ecosystems. The formalized description of a four-dimensional model of population dynamics is proposed, taking into account competition and migration flows. An optimization problem is formulated and solved for finding model parameters that ensure the coexistence of populations under conditions of competition between two species in the main area, taking into account the migration of these species. Considered within the framework of the optimization problem, the quality criterion ensures the fulfillment of the conditions for the coexistence of populations. In order to solve the optimization problem, an evolutionary search algorithm is developed. For the proposed population-migration model, the qualitative behavior is studied, projections of phase portraits are constructed, trajectories are found for different sets of model parameters. The comparative analysis of the results of numerical experiments on the search for model trajectories is given. Computational experiments are performed using the developed software package. The obtained results can be used in modeling ecological, socio-economic, demographic and physico-chemical processes.

**Keywords:** *mathematical modeling, systems of differential equations, population dynamics models, competition, migration flows, trajectory dynamics, numerical optimization methods, differential evolution, computer experiments*