



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2022, № 2, с. 64-74.

Поступила: 19.11.2022

Окончательный вариант: 29.11.2022

© УлГУ

УДК 519.872.3

## Стратегии управления приоритетами в замкнутых системах массового обслуживания

Подгорнов М. Д., Савинов Ю. Г.\*

[\\*uras@aport.ru](mailto:uras@aport.ru)

УлГУ, Ульяновск, Россия

---

В работе развивается семимартингалный (траекторный) подход к математическому описанию и моделированию замкнутых систем массового обслуживания с приоритетами в обслуживании. Проведено сравнение двух стратегий управления приоритетом. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

*Ключевые слова:* система массового обслуживания, относительный приоритет, динамический приоритет, семимартингалное описание, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование.

---

### Введение

В данной работе методами имитационного моделирования проведено сравнение двух стратегий управления приоритетами очередей в замкнутой многоканальной системе массового обслуживания (СМО). Рассматриваемая в работе СМО в первом приближении может быть использована для моделирования работы компании с фиксированным инвентарём оборудования (например, прачечной с некоторым количеством сушилок и стиральных машин), которые в случае выхода из строя, отправляются на ремонт и возвращаются обратно для эксплуатации.

Первая стратегия основана на относительном приоритете (приоритетная заявка ожидает окончания обслуживания текущей заявки и после этого встает на внеочередное обслуживание). Вторая – на динамическом приоритете. Под динамическим приоритетом подразумевается стратегия, в которой приоритет заявок различных классов/типов может изменяться со временем. Для контроля приоритета использован подход, основанный на регулировании размеров очередей [1]. Основное отличие от работы [1] состоит в том, что

в работе [1] исследуется открытая СМО, а в данной работе рассматривается замкнутая СМО (см. рис. 1).

Для математического описания СМО использован аппарат точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [2]. С данным траекторным подходом при описании СМО можно ознакомиться, например, по работам [3-12]. Классическое марковское описание (см., например, работы [13-28]) рассматриваемой в работе СМО не использовалось по следующим причинам. Широко известно, что марковскими методами хорошо исследуются одноканальные СМО с приоритетами (см., например, [15]). Однако, для многоканальных систем с приоритетами, сложность анализа резко возрастает, особенно для СМО, в которых средние длительности обслуживания различны для заявок разных типов/классов (см., например, [26], [27]). Более того, в случае использования относительных приоритетов в многоканальных СМО анализ становится еще более сложным, что связано с сильным разрастанием пространства состояний [25].

В рассматриваемой в работе СМО многоканальная, с различными приоритетами и различными распределениями времени обслуживания у разных типов/классов заявок. Поэтому аналитическое исследование модели в марковском описании сильно затруднено. А для имитационного моделирования траекторное описание более удобно, так как позволяет относительно просто перейти к итерационным формулам, необходимым для компьютерного моделирования. Кроме этого, сложность такой модели с увеличением числа каналов практически не растет, в отличие от модели в марковском описании. Поэтому в данной работе, с учетом всего вышесказанного, выбрано траекторное описание модели в терминах точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [2].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим многоканальную СМО с двумя независимыми ограниченными источниками заявок емкости  $n_1 > 0$  и  $n_2 > 0$  (см. рис.1). В СМО циркулируют заявки двух типов: первый тип (сушилки) – менее важные для работы организации заявки, которые чаще ломаются, второй тип (стиральные машины) – более важные для работы организации заявки, реже ломаются, но, если сломались – требуют скорейшего ремонта. Заявки обоих типов (сушилки и стиральные машины) ломаются независимо друг от друга и образуют потоки приборов, отправленных на ремонт. Интенсивность поломок для сушилки  $\lambda_1 > 0$ , для стиральной машины  $\lambda_2 > 0$ . Заявки на ремонт обслуживают  $r$  операторов, имеющих одинаковую квалификацию со средней длительностью ремонта  $1/\mu_1 > 0$  для первого типа заявок (сушилок) и  $1/\mu_2 > 0$  для второго (стиральных машин). Для каждого типа заявок формируется отдельная неограниченная очередь на ремонт. В начальный момент времени все  $n_1$  сушилок и  $n_2$  стиральных машин находятся в исправном состоянии.

В данном случае очевидна неэффективность общей очереди, так как в таком случае существует вероятность того, что важные заявки второго вида будут долго ждать начала обслуживания, что может быть неприемлемо. Другие стратегии разделения ресурса (в данном случае  $r$  операторов), такие как стратегия абсолютного приоритета или стратегия

подвижной границы [28] также не эффективны, так как допускают возможность или потери заявок первого вида или большую часть времени операторы, зарезервированные под заявки второго вида, будут простаивать. Поэтому предложены следующие стратегии.

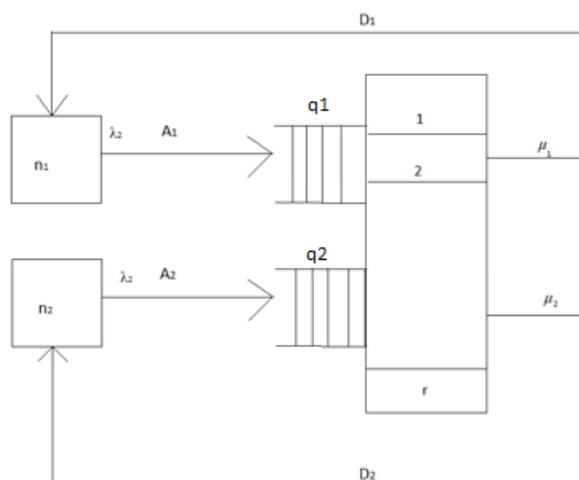


Рис.1. Схема СМО.

**Первая стратегия.** Заявки второго вида (стиральные машины) обладают относительным приоритетом над заявками первого типа (сушилками), то есть встают на внеочередное обслуживание после выхода из ремонта текущей заявки (отремонтированный прибор возвращается в эксплуатацию). Таким способом достигается приемлемое среднее время ожидания начала обслуживания для заявок второго вида при наличии необслуженных заявок первого вида и минимальных простоях операторов.

**Вторая стратегия.** Изначально заявки первого типа имеют относительный приоритет. После обслуживания заявки первого типа приоритет переходит к заявкам второго типа, если они есть в очереди. Если заявок второго типа в очереди нет, то приоритет остается у заявок первого типа. Аналогично, после выхода из ремонта обслуженной заявки второго типа приоритет переходит к заявкам первого типа. То есть при наличии заявок обоих типов заявки проходят на обслуживание «через одного», а при отсутствии заявок одного из типов приоритет (очередность) не передается. Таким способом достигается приемлемое среднее время ожидания начала обслуживания для редких, но важных заявок второго типа при отсутствии необслуженных заявок второго типа и минимальных простоях операторов.

## 2. Математическая модель

Для описания математической модели будем использовать следующие процессы:

$A^1 = A_t^1$  – число «поломанных сушилок» за время  $t$ ;

$A^2 = A_t^2$  – число «поломанных стиральных машин» за время  $t$ ;

$D^1 = D_t^1$  – число сушилок, отремонтированных за время  $t$ ;

$D^2 = D_t^2$  – число стиральных машин, отремонтированных за время  $t$ ;

$q^1 = q_t^1$  – число сушилок, в очереди на ремонт в момент  $t$ ;

$q^2 = q_t^2$  – число стиральных машин, в очереди на ремонт в момент  $t$ ;  
 $r^1 = r_t^1$  – число сушилок, находившихся на ремонте в момент  $t$ ;  
 $r^2 = r_t^2$  – число стиральных машин, находившихся на ремонте в момент  $t$ ;  
 $\xi^1 = \xi_t^1$  – число сушилок, работающих в момент  $t$ ;  
 $\xi^2 = \xi_t^2$  – число стиральных машин, работающих в момент  $t$ ;  
 $n_1$  – начальное количество сушилок;  
 $n_2$  – начальное количество стиральных машин.

1. Опишем сначала работу по обработке заявок первого типа.

Процессы  $A_t^1, D_t^1$  — это точечные процессы. Опишем их подробнее:  $A^1 = (A_t^1)_{t \geq 0}$  - число заявок первого типа, поступивших в ремонт за время  $t \geq 0$ ,  $A_0^1 = 0$ ;  $D^1 = (D_t^1)_{t \geq 0}$  - число обслуженных заявок первого типа за время  $t \geq 0$ ,  $D_0^1 = 0$ .

Точечные процессы  $A^1, D^1$  определяются своими компенсаторами  $\tilde{A}^1 = (\tilde{A}_t^1)_{t \geq 0}$  и  $\tilde{D}^1 = (\tilde{D}_t^1)_{t \geq 0}$  в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [2]:

$$\tilde{A}_t^1 = \int_0^t \xi_s^1 \cdot \lambda_1 ds, \quad \lambda_1 > 0. \quad (1)$$

Здесь  $\xi_t^1$  – число заявок первого типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$ ,  $\xi_0^1 = n_1$  (находящихся в рабочем состоянии). Компенсатор для процесса  $D^1 = (D_t^1)_{t \geq 0}$  определяется следующим соотношением:

$$\tilde{D}_t^1 = \int_0^t r_s^1 \mu_1 ds. \quad (2)$$

Соответственно  $r_t^1$  - число заявок первого типа, находящихся непосредственно на обслуживании в момент времени  $t \geq 0$ , можно определить следующим образом:

$$r_t^1 = n_1 - \xi_t^1 - q_t^1, \quad r_0^1 = 0. \quad (3)$$

Здесь  $q_t^1$  – число заявок первого типа в очереди в момент времени  $t \geq 0$ ,  $q_0^1 = 0$ .

Кроме этого, для  $\xi_t^1$  в момент времени  $t \geq 0$  можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t^1 = n_1 - A_t^1 + D_t^1, \quad n_1 > 0. \quad (4)$$

2. Аналогично опишем работу по обработке заявок второго типа.

Процессы  $A_t^2, D_t^2$  — это точечные процессы. Опишем их подробнее:  $A^2 = (A_t^2)_{t \geq 0}$  - число заявок второго типа, поступивших в ремонт за время  $t \geq 0$ ,  $A_0^2 = 0$ ;  $D^2 = (D_t^2)_{t \geq 0}$  - число обслуженных заявок второго типа за время  $t \geq 0$ ,  $D_0^2 = 0$ .

Точечные процессы  $A^2, D^2$  определяются своими компенсаторами  $\tilde{A}^2 = (\tilde{A}_t^2)_{t \geq 0}$  и  $\tilde{D}^2 = (\tilde{D}_t^2)_{t \geq 0}$  в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов:

$$\tilde{A}_t^2 = \int_0^t \xi_s^2 \cdot \lambda_2 ds, \quad \lambda_2 > 0. \quad (5)$$

Здесь  $\xi_t^2$  – число заявок второго типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$ ,  $\xi_0^2 = n_2$  (находящихся в рабочем состоянии). Компенсатор для процесса  $D^2 = (D_t^2)_{t \geq 0}$  определяется следующим соотношением:

$$\tilde{D}_t^2 = \int_0^t r_s^2 \mu_2 ds. \quad (6)$$

Соответственно  $r_t^2$  - число заявок первого типа, находящихся непосредственно на обслуживании в момент времени  $t \geq 0$ , можно определить следующим образом:

$$r_t^2 = n_1 - \xi_t^2 - q_t^2, r_0^2 = 0. \quad (7)$$

Здесь  $q_t^2$  - число заявок первого типа в очереди в момент времени  $t \geq 0$ ,  $q_0^2 = 0$ . Кроме этого, для  $\xi_t^2$  в момент времени  $t \geq 0$  можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t^2 = n_2 - A_t^2 + D_t^2, n_2 > 0. \quad (8)$$

3. Опишем управление относительным приоритетом через регулирование размеров очередей (первая стратегия).

Для размера очереди из заявок второго вида  $q_t^2$  в момент времени  $t \geq 0$  можно написать следующее балансовое уравнение:

$$dq_t^2 = I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)dA_t^2 - (I(q_t^2 > 0)dD_t^1 - I(q_t^2 > 0)dD_t^2), \quad (9)$$

где  $I(\cdot)$  - индикаторная функция,  $q_0^2 = 0$ . Логика построения уравнения (9) следующая. Во-первых, размер очереди заявок второго вида  $q_t^2$  может увеличиться на одну заявку, если поступит заявка второго вида в момент, когда все  $r$  операторов заняты ( $r_t^1 + r_t^2 \geq r$ ). Во-вторых, размер очереди заявок второго вида  $q_t^2$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки первого вида и есть заявки второго вида в очереди ( $q_t^2 > 0$ ). В-третьих, размер очереди заявок второго вида  $q_t^2$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки второго вида, а заявки второго вида в очереди есть ( $q_t^2 > 0$ ).

Аналогичное уравнение верно и для размера очереди из заявок первого вида  $q_t^1$ :

$$dq_t^1 = I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)dA_t^1 - (I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0)dD_t^1 - I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0)dD_t^2). \quad (10)$$

Построение уравнения (10) имеет иную логику по сравнению с предыдущей формулой. Во-первых, размер очереди заявок первого вида  $q_t^1$  может увеличиться на одну заявку, если поступит заявка первого вида в момент, когда все  $r$  операторов заняты ( $r_t^1 + r_t^2 \geq r$ ). Во-вторых, размер очереди заявок первого вида  $q_t^1$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки первого вида, заявок второго вида в очереди нет ( $q_t^2 = 0$ ), а заявки первого вида во второй очереди есть ( $q_t^1 > 0$ ). В-третьих, размер очереди заявок первого вида  $q_t^1$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки второго вида и их нет в очереди ( $q_t^2 = 0$ ), но есть заявки первого вида в очереди ( $q_t^1 > 0$ ):

4. Аналогично опишем управление в случае использования динамического приоритета (вторая стратегия).

Для размера очереди из заявок первого типа  $q_t^1$  в момент времени  $t \geq 0$  можно написать следующее балансовое уравнение:

$$dq_t^1 = I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)dA_t^1 - I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0)dD_t^1 - I(q_t^1 > 0)dD_t^2, \quad (11)$$

где  $I(\cdot)$  - индикаторная функция,  $q_0^1 = 0$ . Логика построения уравнения (11) следующая. Во-первых, размер очереди заявок первого типа  $q_t^1$  может увеличиться на одну заявку, ес-

ли поступит заявка первого типа в момент, когда все  $r$  операторов заняты ( $r_t^1 + r_t^2 \geq r$ ). Во-вторых, размер очереди заявок первого типа  $q_t^1$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки первого типа, заявок второго типа в очереди нет ( $q_t^2 = 0$ ), а заявки первого типа в очереди есть ( $q_t^1 > 0$ ). В-третьих, размер очереди заявок первого типа  $q_t^1$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки второго типа и есть заявки первого типа в очереди ( $q_t^1 > 0$ ).

Аналогичное уравнение верно и для размера очереди из заявок второго типа  $q_t^2$ :

$$dq_t^2 = I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)dA_t^2 - I(q_t^1 = 0, q_t^2 > 0)dD_t^2 - I(q_t^2 > 0)dD_t^1. \quad (12)$$

Логика построения уравнения (12) полностью совпадает с предыдущей формулой. Во-первых, размер очереди заявок второго типа  $q_t^2$  может увеличиться на одну заявку, если поступит заявка второго типа в момент, когда все  $n$  операторов заняты ( $r_t^1 + r_t^2 \geq r$ ). Во-вторых, размер очереди заявок второго типа  $q_t^2$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки второго типа, заявок первого типа в очереди нет ( $q_t^1 = 0$ ), а заявки второго типа во второй очереди есть ( $q_t^2 > 0$ ). В-третьих, размер очереди заявок второго типа  $q_t^2$  может уменьшиться на одну заявку, если закончится обслуживание заявки первого типа и есть заявки второго типа в очереди ( $q_t^2 > 0$ ).

### 3. Итерационные формулы для компьютерного моделирования

Выведем формулы, необходимые для имитационного моделирования СМО. На стохастическом базисе  $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  из формул (1)-(12) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_1 \cdot \xi_t^1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (13)$$

$$P\{A_{t+\Delta}^2 - A_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_2 \cdot \xi_t^2 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (14)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^1 - D_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_1 \cdot r_t^1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (15)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^2 - D_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \mu_2 \cdot r_t^2 \cdot \Delta + o(\Delta). \quad (16)$$

Формулы (13)-(16) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени)  $\Delta$  из условия  $\lambda_i \cdot \xi_t^i \cdot \Delta \ll 1$ ,  $\mu_i \cdot r_t^i \cdot \Delta \ll 1$ ,  $i = 1, 2$  получим следующие итерационные формулы (для вычисления значений процессов в момент времени  $t + \Delta$  через значения процессов в момент  $t$ ):

$$A_{t+\Delta}^1 = A_t^1 + \delta(\lambda_1), \quad (17)$$

$$A_{t+\Delta}^2 = A_t^2 + \delta(\lambda_2), \quad (18)$$

$$D_{t+\Delta}^1 = D_t^1 + \delta(\mu_1 \cdot r_t^1), \quad (19)$$

$$D_{t+\Delta}^2 = D_t^2 + \delta(\mu_2 \cdot r_t^2), \quad (20)$$

где  $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Здесь  $\Delta A_t^1 = A_{t+\Delta}^1 - A_t^1$ ,  $\Delta D_t^1 = D_{t+\Delta}^1 - D_t^1$ ,  $\Delta A_t^2 = A_{t+\Delta}^2 - A_t^2$ ,  $\Delta D_t^2 = D_{t+\Delta}^2 - D_t^2$ .

Для стратегии с относительным приоритетом итерационные формулы для очередей имеют следующий вид:

$$q_{t+\Delta}^1 = q_t^1 + \Delta A_t^1 \cdot I(r_t^1 + r_t^2 \geq r) - \Delta D_t^1 \cdot I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0) + \Delta D_t^2 \cdot I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0), \quad (19)$$

$$q_{t+\Delta}^2 = q_t^2 + \Delta A_t^2 \cdot I(r_t^1 + r_t^2 \geq r) - \Delta D_t^1 \cdot I(q_t^2 > 0) - \Delta D_t^2 \cdot I(q_t^2 > 0). \quad (20)$$

Для стратегии с динамическим приоритетом итерационные формулы для очередей имеют другой вид:

$$q_{t+\Delta}^1 = q_t^1 + I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)\Delta A_t^1 - I(q_t^2 = 0, q_t^1 > 0)\Delta D_t^1 - I(q_t^1 > 0)\Delta D_t^2, \quad (21)$$

$$q_{t+\Delta}^2 = q_t^2 + I(r_t^1 + r_t^2 \geq r)\Delta A_t^2 - I(q_t^1 = 0, q_t^2 > 0)\Delta D_t^2 - I(q_t^2 > 0)\Delta D_t^1. \quad (22)$$

#### 4. Результаты компьютерного моделирования

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью языка программирования высокого уровня C# в среде разработки Visual Studio 2019.

На рисунках 2, 3 представлены результаты моделирования 100 траекторий процессов  $A_t^1, A_t^2, D_t^1, D_t^2, \xi_t^1, \xi_t^2, Q_t^1, Q_t^2, r_t^1, r_t^2$ , при использовании итерационных формул (17)-(22) для обеих стратегий.

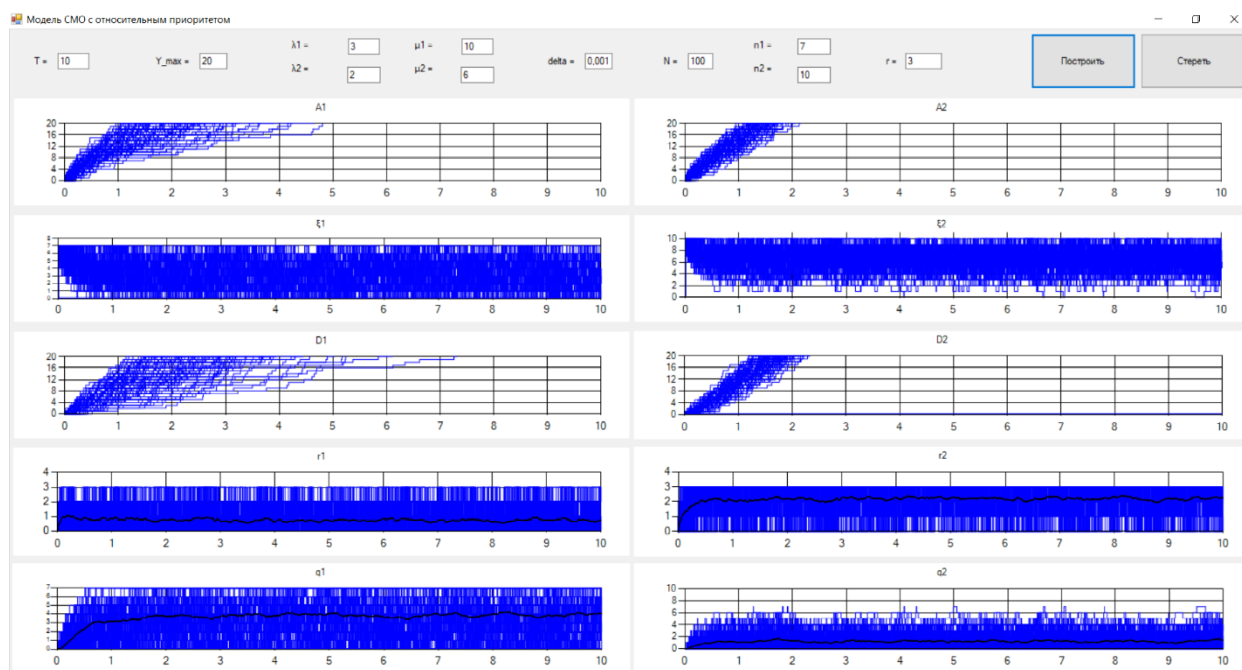
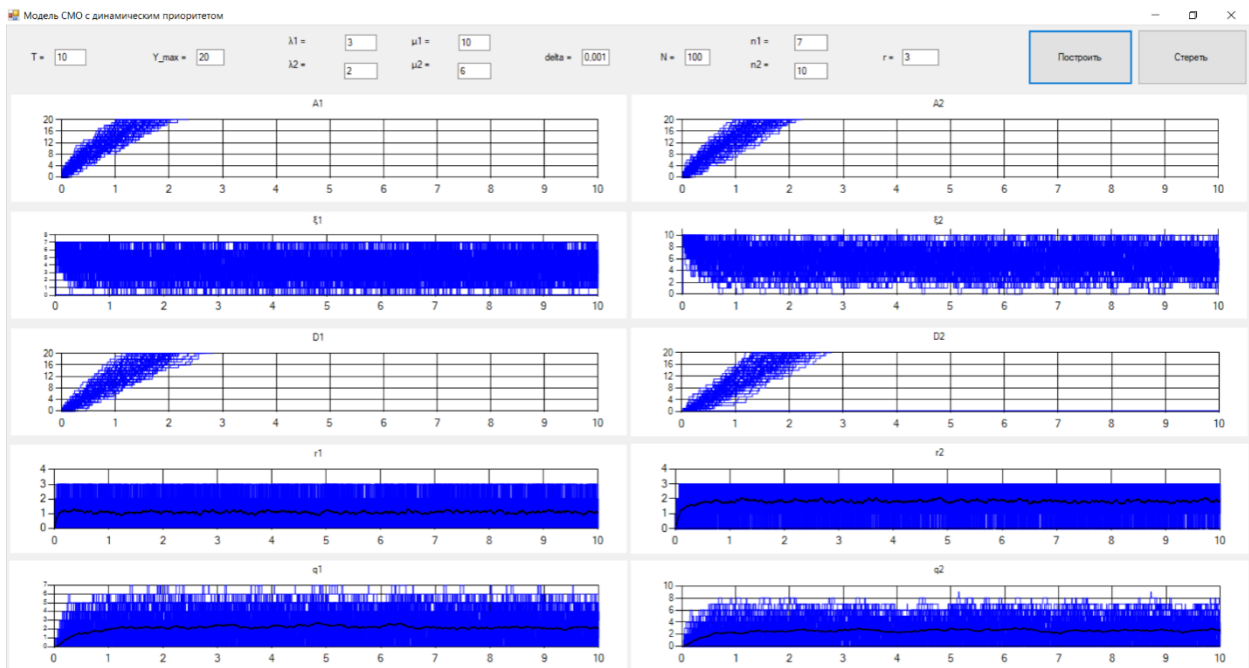
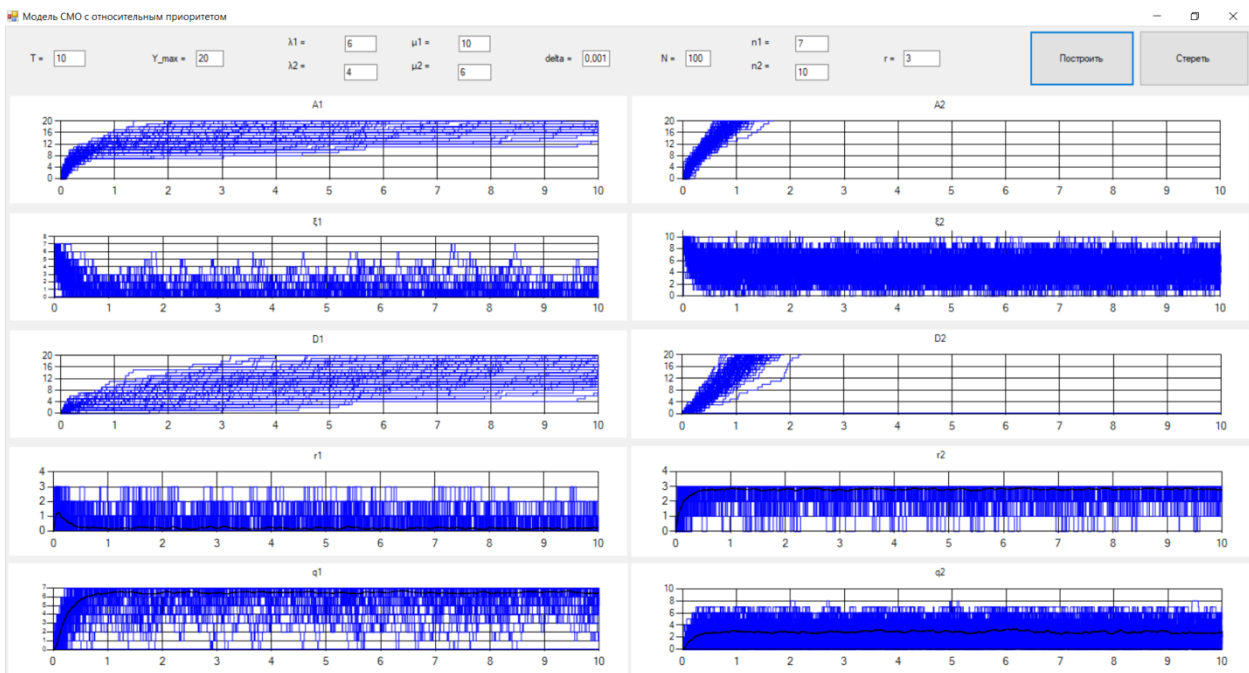


Рис. 2. Первая стратегия. Результаты моделирования при  $T = 20$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 10$ ,  $\mu_2 = 6$ ,  $n_1 = 7$ ,  $n_2 = 10$  и  $r = 3$ .

Результат моделирования показывают, что в обоих случаях система ведет себя достаточно стабильно (см. рис. 2, 3). Однако при использовании стратегии относительного приоритета наблюдается высокое среднее значение очереди менее важных, но необходимых для работы системы заявок первого типа.



**Рис. 3.** Вторая стратегия. Результаты моделирования при  $T = 20$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 10$ ,  $\mu_2 = 6$ ,  $n_1 = 7$ ,  $n_2 = 10$  и  $r = 3$ .



**Рис. 4.** Первая стратегия. Результаты моделирования при возросшей нагрузке.

При пропорциональном увеличении интенсивностей поломок до  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 4$ , картина меняется (см. рис. 4, 5). При использовании стратегии относительного приоритета наблюдается существенный рост очереди заявок первого типа. Несмотря на то, что количество более важных заявок в системе остаётся на невысоком уровне, система не может продолжать нормально функционировать, так как в ней практически не остаётся ремонт-



ников для обслуживания заявок первого типа. Если же использовать стратегию динамического приоритета, то можно увидеть другое. Очереди для заявок обоих типов остаются в системе на достаточном уровне, чтобы система продолжала устойчиво функционировать.

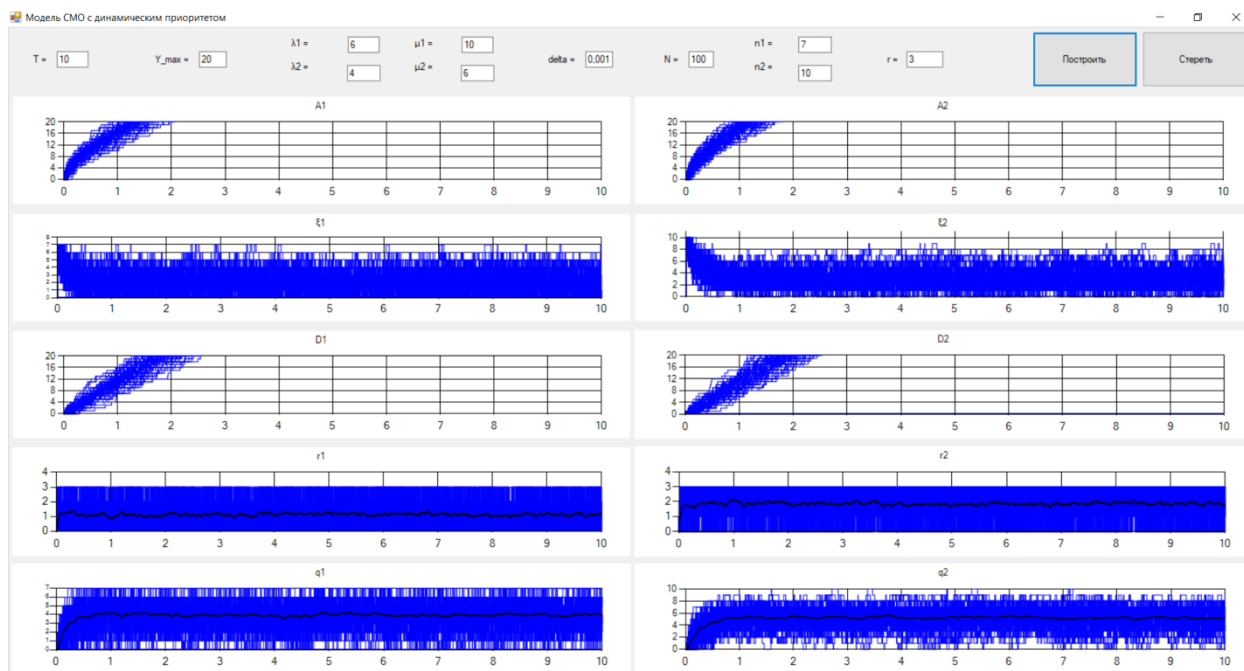


Рис. 5. Вторая стратегия. Результаты моделирования при возросшей нагрузке.

Серия имитационных экспериментов с моделями показала, что это тенденция сохраняется, и стратегия динамического приоритета имеет преимущество. При данном подходе не происходит непропорционального роста очередей, что позволяет системе выполнять все заданные функции.

## Список литературы

1. Савинов Ю. Г., Подгорнов М. Д. Математическая модель многоканальной СМО с динамическим приоритетом // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. УлГУ. 2022, № 1, с. 56-64.
2. Бутов А. А., Раводин К. О. *Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2009.
3. Бутов А. А., Галимов Л. А. Стохастическая имитационная модель оценки резерва произошедших, но не заявленных страховых убытков в терминах СМО // *Фундаментальные исследования*. 2016, № 8-2, с. 234-238.
4. Бутов А. А., Савинов Ю.Г. *Теория массового обслуживания: учебно-методическое пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2007.
5. Бутов А. А., Галимов Л. А. Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах // *Современные проблемы науки и образования*. 2015, № 2, с. 758.

6. Бутов А. А., Галимов Л. А. Оптимальное управление распределением заявок в многоканальной системе массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком поступления заявок и экспоненциальным временем обслуживания // *Естественные и технические науки*. 2014, № 9-10 (77), с. 244-247.
7. Савинов Ю. Г., Исмаилова М. В., Рослов М. Э. Траекторные методы моделирования многофазных СМО // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2019, № 1, с. 85-91.
8. Савинов Ю. Г., Тихоненко А. А., Пронин В. И., Щукин А. Н. Семимартингальная модель СМО с произвольным временем ожидания "нетерпеливых" заявок // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2019, № 2, с. 81-88.
9. Савинов Ю. Г., Сафиуллов И. Д., Дуняшина М. С. Модель обслуживания парка оборудования с возможной задержкой в начале ремонта // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2020, № 1, с. 103-108.
10. Савинов Ю. Г., Щукин А. Н., Подгорнов М. Д. Математическая модель мультисервисного кол-центра с многоэтапным обслуживанием и дообслуживанием неприоритетных заявок // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2021, № 1, с. 109-117.
11. Савинов Ю. Г., Пронин В. И., Курицин А. Е. Математическая модель центра обслуживания вызовов со случайной задержкой при многоэтапном обслуживании // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2021, № 1, с. 102-108.
12. Савинов Ю. Г., Рослов М. Э., Куманина Я. А. Стратегия адаптивного разделения ресурсов в мультисервисных сетях // *Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии*. 2020, № 1, с. 95-102.
13. Риордан Д. *Вероятностные системы обслуживания* (пер. с англ.) М.: Связь, 1966. 184 с.
14. Алиев Т. И. *Основы моделирования дискретных систем*. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
15. Джейсуол Н. К. *Очереди с приоритетами* (пер. с англ.) М.: Мир, 1973. 279 с.
16. Бронштейн О. И., Духовный И. М. *Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах*. М.: Наука, 1976. 220 с.
17. Лысенкова В. Т. *Исследование многолинейных систем массового обслуживания с ограниченным накопителем и приоритетами*: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Институт проблем передачи информации. М., 1973.
18. Мова В. В., Пономаренко Л. А., Калиновский А. М. *Организация приоритетного обслуживания в АСУ*. Киев: Техника, 1977. 160 с.
19. Gerasimenko M., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y., Himayat N., Yeh S.-P., Talwar S. Adaptive resource management strategy in practical multi-radio heterogeneous

- networks // *IEEE Access. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.* 2017, v.5, p. 219-235.
20. Antonioli R. P., Rodrigues E. B., Maciel T. F. et al. Adaptive resource allocation framework for user satisfaction maximization in multi-service wireless networks // *Telecommun. Syst.* 2018, v. 68, p. 259–275. <https://doi.org/10.1007/s11235-017-0391-3>
  21. Росляков А. В., Цыганков Н. И. Анализ моделей распределенных центров обслуживания вызовов // *Электросвязь.* 2005, №8, с. 22-25.
  22. Томашевский В. Л. *Многоканальные приоритетные системы массового обслуживания*: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М.: МГУ, 1986. 14 с.
  23. Хомоненко А. Д. Вероятностный анализ приоритетного обслуживания с прерываниями в многопроцессорных системах // *Автоматика и вычислительная техника.* 1990, № 2, с. 55–61.
  24. Рыжиков Ю. И. Средние времена ожидания и пребывания в многоканальных приоритетных системах // *Информационно-управляющие системы.* 2006, № 6, с. 43–49.
  25. Рыжиков Ю. И., Уланов А. В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2016, № 3(36), с. 60–65.
  26. Gail H. R., Hantler S. L., Taylor B. A. Analysis of a non-preemptive priority multiserver queue // *Advances in applied prob.* 1988, v. 20, p. 852.
  27. Miller D. R. Steady state algorithmic analysis of M/M/c two priority queues with heterogeneous rates // *Applied probability — computer science: the interface.* Boston: Birkhauser, 1982. V.2. P. 207–222.
  28. Крылов В. В., Самохвалова С. С. *Теория телеграфика и ее приложения.* СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 288 с.

## Priority control strategies in closed queuing systems

*Podgornov, M. D., Savinov, Y. G.* \*

\*[uras@aport.ru](mailto:uras@aport.ru)

Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

The paper develops a semi-martingale (trajectory) approach to the mathematical description and modeling of closed queuing systems with service priorities. A comparison of two priority control strategies is carried out. The transition from a mathematical model to iterative formulas, which are used for simulation, is shown.

**Keywords:** *queuing system, priority, semi-martingale description, point process, compensator, simulation modeling.*