



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2023, № 1, с. 52-59.

Поступила: 21.06.2023

Окончательный вариант: 21.06.2023

© УлГУ

УДК 51-3

## Управление демпфированием механических колебаний при моделировании систем конвейерного транспорта

*Петров А. А.*

[xeal91@yandex.ru](mailto:xeal91@yandex.ru)

ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, Россия

---

Рассмотрена математическая модель ленточного конвейера с динамическим изменением угла между горизонтальной плоскостью и плоскостью ленты конвейера. Описание указанной модели осуществляется с помощью нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в четырехмерном фазовом пространстве. Использована обобщенная функция осевого сопротивления при движении конвейера. Предложен закон переключения для фиксации горизонтального положения ленты конвейера. Исследована траекторная динамика указанной модели с учетом вариативности параметров. Для описания демпфирования колебаний конвейерной ленты предложена модель системы с одной степенью свободы. Получены графики фазовых траекторий модели с учетом вариативности коэффициента осевого сопротивления. Дана интерпретация полученных результатов и описаны возможности применения моделей.

*Ключевые слова:* математическая модель ленточного конвейера, демпфирование колебаний, стабилизация, траекторная динамика, вычислительные эксперименты

---

### Введение

Проектирование систем конвейерного транспорта с предварительным построением и численным исследованием математических моделей, описывающих динамику таких систем, является актуальным научно-техническим направлением [1–7]. К классу перспективных задач следует отнести построение и анализ динамических моделей ленточного конвейера с переменным углом подъема. Ряд моделей такого типа рассмотрен в [8–10]. В [8] представлено описание базовой модели ленточного конвейера с динамическим изменением угла между горизонтальной плоскостью и плоскостью ленты конвейера. В [9]

предложена такая модифицированная математическая модель ленточного конвейера, в которой учитывается осевое трение. В [8, 9] рассматривается управляемый случай с применением интеллектуальных методов. В [10] изучаются вопросы стабилизации неуправляемой модели ленточного конвейера.

В процессе разработки систем управления конвейерным транспортом высокую эффективность демонстрируют методы компьютерного моделирования нелинейных, нестационарных и неоднородных процессов с применением методов искусственного интеллекта. Среди методов искусственного интеллекта для решения таких задач следует отметить методы машинного обучения и нечеткой логики. Однако для предварительного анализа моделей ленточного конвейера большой интерес представляет исследование траекторной динамики с учетом вариативности параметров и с применением численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений [10]. На первом этапе анализ траекторной динамики целесообразно провести без учета управляющих функций в правой части модельных уравнений, однако с учетом изменения параметров системы, влияющих на механические свойства системы. Анализ результатов изменения параметров позволяет в ряде случаев реализовать управление в системе.

В настоящей работе предложена такая модификация математической модели ленточного конвейера с переменным углом подъема, в которой используются обобщенная функция осевого сопротивления и функция демпфирования горизонтального положения ленты. Исследована траекторная динамика указанной модели с учетом вариативности параметров. Предложен закон переключения для фиксации горизонтального положения ленты. Построена модель системы с одной степенью свободы для описания демпфирования колебаний конвейерной ленты. Представлены графики фазовых траекторий модели с учетом вариативности коэффициента осевого сопротивления. Дана интерпретация полученных результатов и описаны возможности применения моделей.

## Изучаемые модели и результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим модель системы конвейерного транспорта с учетом динамического изменения угла наклона конвейерной ленты. Указанная модель представлена дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{p}{m}, \\
 \dot{p} &= u_p(t) - k \frac{p}{m} - (m - m_0) g \sin(\alpha_0), \\
 \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1, \\
 \dot{\alpha}_1 &= \frac{u_\alpha(t)}{mb\varepsilon^2} - \frac{g \cos(\alpha_0)}{\varepsilon}, \\
 u_p, u_\alpha &\in U, \varepsilon \in E, m \in M,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\alpha_0$  – угол подъема конвейера относительно нулевого положения,  $\alpha_1$  – скорость углового вращения конвейера,  $g$  – ускорение свободного падения,  $x$  – перемещение ленты конвейера,  $p$  – импульс конвейера,  $m_0$  – масса ленты конвейера,  $m_1$  – общая масса грузов на конвейере,  $u_\alpha(t)$  – функция управления тягой конвейера,  $u_p(t)$  – функция управления углом подъема ленты,  $\varepsilon$  – положение центра масс конвейера относительно нижнего ролика,  $b$  – коэффициент, определяющий момент инерции конвейера,  $k$  – коэффициент трения качения. Множества  $M, E, U$  включают в себя все возможные значения общей массы грузов, центра масс и управлений соответственно. Изменения режимов функционирования в модели (1) соответствуют моментам выбора соответствующих значений  $m_1$  и  $\varepsilon$  согласно определенному закону.

Следует отметить, что указанная модель описывает базовые взаимодействия в системе конвейера, однако не учитывает ряд существенных физических эффектов. В частности, рассеяние энергии в системе рассматривается в координатах перемещения ленты. Кроме того, угловые координаты являются неограниченными. Таким образом, важной задачей является модификация модели (1) с учетом указанных эффектов. Введем дополнительную функцию, отвечающую за осевое сопротивление. В таком случае модель (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= u_p(t) - k \frac{p}{m} - (m - m_0)g \sin(\alpha_0), \\ \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \frac{u_\alpha(t) - \gamma(\alpha_1)}{mb\varepsilon^2} - \frac{g \cos(\alpha_0)}{\varepsilon}, \\ u_p, u_\alpha &\in U, \varepsilon \in E, m \in M, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\gamma(\alpha_1)$  – функция осевого сопротивления.

Следует отметить, что можно рассматривать функции осевого сопротивления различных типов. В ряде случаев достаточно использовать линейный вид функции, например, можно принять  $\gamma(\alpha_1) = l\alpha_1$ . Теоретический и прикладной интерес представляет изучение динамики системы (2) и для нелинейных функций осевого сопротивления.

Характер ограничений на осевое положение конвейера имеет существенное значение, поскольку конвейер может принимать положение от  $\alpha_0 = 0$  (горизонтальное положение ленты) до  $\alpha_0 = \pi/2$  (вертикальное положение ленты). На практике целесообразно ограничивать подъем ленты положительными углами, меньшими  $\pi/2$ . Среди способов, которыми можно осуществить ограничение осевого положения конвейера, можно выделить такие способы, как 1) модификация самой модели (2); 2) введение переключаемых режимов.

Закон переключения для фиксации горизонтального положения ленты может быть определен следующим образом:

$$\text{если } \alpha_0 = 0, \text{ то } \alpha_1 = -\alpha_1.$$

Таким образом, при «столкновении» с горизонтальной осью происходит «отскок» конвейера в противоположную сторону. При этом угловое положение конвейера всегда

будет задаваться положительным значением. Однако, предложенный закон переключения не учитывает шаг алгоритма решения уравнения и диссипативные эффекты. Если ослабить ограничение на положение ленты вдоль горизонтальной оси, то с учетом указанных эффектов закон переключения примет вид:

$$\text{если } \alpha_0(t_{n-1}) \notin (-s, s) \wedge \alpha_0(t_n) \in (-s, s), \text{ то } \alpha_1 = -l\alpha_0, \quad (3)$$

где  $s$  – граница «срабатывания» переключения,  $n$  – номер текущего шага решения обыкновенного дифференциального уравнения,  $l$  – коэффициент демпфирования из диапазона от 0 до 1. Предложенный закон переключения допускает незначительные отрицательные значения угла подъема ленты, что обусловлено погрешностью алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Также учитываются диссипативные силы, под воздействием которых скорость осевого перемещения снижается при каждом переключении.

Следует отметить, что при относительной простоте введение переключаемого режима обладает определенными недостатками. В частности, с переключаемым режимом вида (3) сложно добиться физической достоверности на границе переключения. Таким образом, модификация модели (2) является более предпочтительной, если это не приводит к усложнению вычислений.

Далее будем считать, что ограничение на положение ленты вдоль горизонтальной оси можно ослабить значительно, т.е. допустимыми являются отрицательные значения угла подъема, однако положение равновесия по-прежнему будет находиться в окрестности  $\alpha_0 = 0$ . В таком случае модель (2) можно модифицировать следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{P}{m}, \\ \dot{p} &= u_p(t) - k \frac{P}{m} - (m - m_0) g \sin(\alpha_0), \\ \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \frac{u_\alpha(t) - \gamma(\alpha_0)}{m c \varepsilon^2} - \frac{g \cos(\alpha_0)}{\varepsilon} + \left( \alpha_0 + \frac{\varepsilon_0}{g} \right)^{-\tau}, \\ u_p, u_\alpha &\in U, \varepsilon \in E, m \in M, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0$  – усредненное положение центра тяжести,  $\tau$  – коэффициент «жесткости» демпфера. Для уравнений (4) добавляется компонента, которая экспоненциально увеличивает сопротивление осевому перемещению при приближении к горизонтальному положению конвейера.

Для проведения вычислительных экспериментов разработана программа на языке Julia. Результаты представлены на рис. 1.

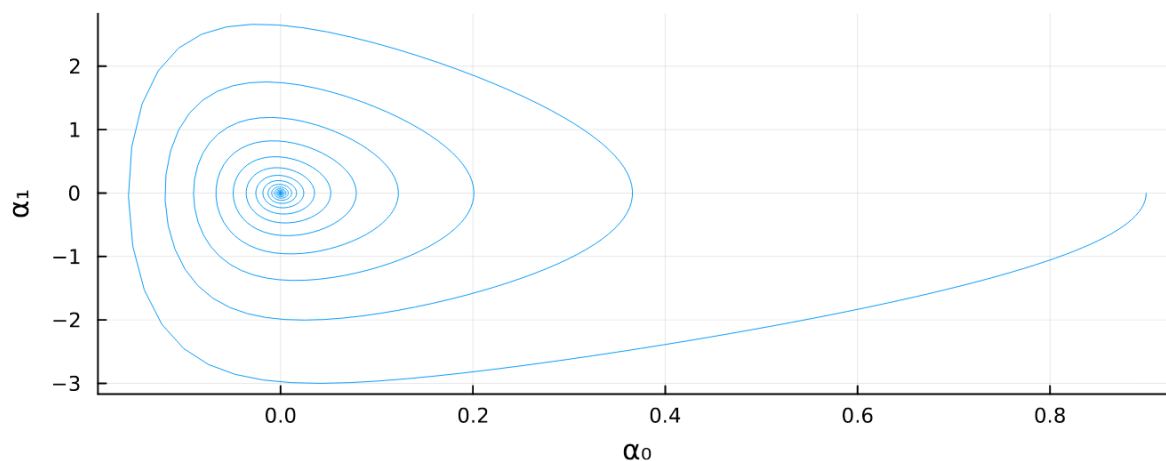


Рис. 1. Траектория системы (4) при  $l = 1$  в отсутствие управления

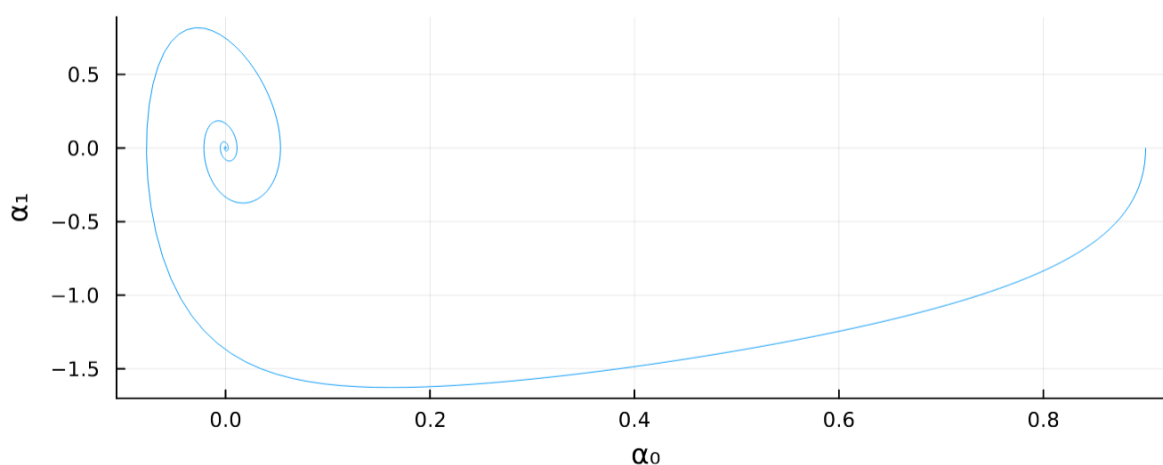


Рис. 2. Траектория системы (4) при  $l = 4$  в отсутствие управления

Согласно рис. 1 и рис. 2, в системе (4) наблюдается устойчивый фокус, соответствующий состоянию равновесия  $E_0(0, 0)$ .

Следует отметить, что помимо демпфера углового положения модель конвейера может учитывать демпфирование других узлов, в частности, натяжения ленты. Рассмотрим модель демпфирующего узла с одной степенью свободы, которая задается уравнением

$$\ddot{x} = f(t) - \frac{c\dot{x}}{m} - \frac{kx}{m}, \quad (5)$$

где  $x$  – линейное перемещение,  $c$  – коэффициент сопротивления,  $k$  – коэффициент упругости,  $m$  – масса груза. Нетрудно заметить, что указанная модель близка к модели пружинного маятника с трением. Подобные модели находят широкое применение при изучении механических, звуковых и электромагнитных колебаний. Отличительной особенностью модели (5) является наличие функции  $f(t)$ , определяющей приток энергии в систему. Источниками вынужденных колебаний в технических системах зачастую служат исполнительные механизмы (например, электромоторы), причем наличие нескольких незначи-

тельно различающихся гармоник могут порождать биения, которые являются источником шума, а также причиной преждевременного выхода механизмов из строя.

Рассмотрим пример, когда в системе учитывается функция  $f(t)$ , вызывающей биения. График функции приведен на рис. 3.

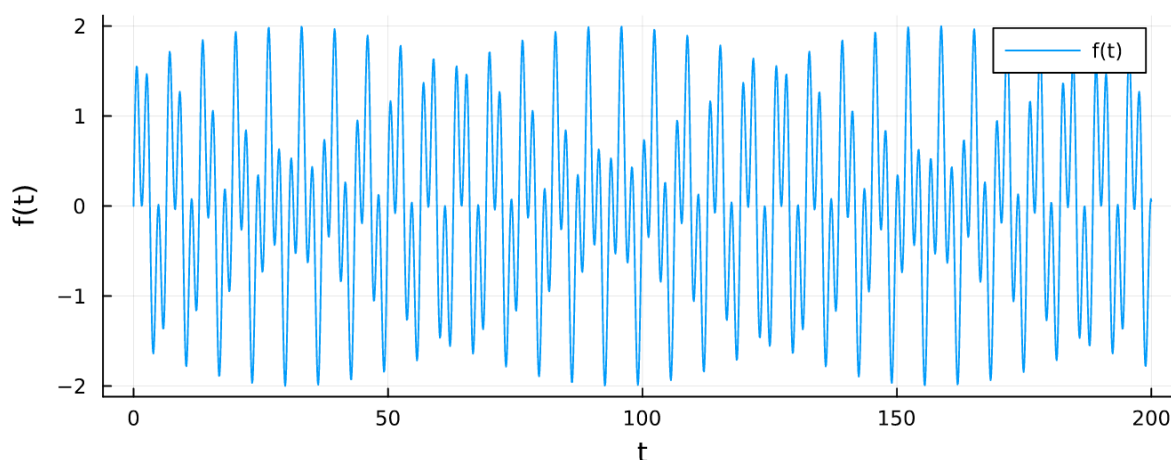


Рис. 3. График функции  $f(t) = \sin(t) + \sin(2.9t)$

Динамика системы (5) зависит от параметров, которые определяют собственную резонансную частоту. На рис. 4 представлен график колебаний демпферного узла при заданном  $f(t)$ .

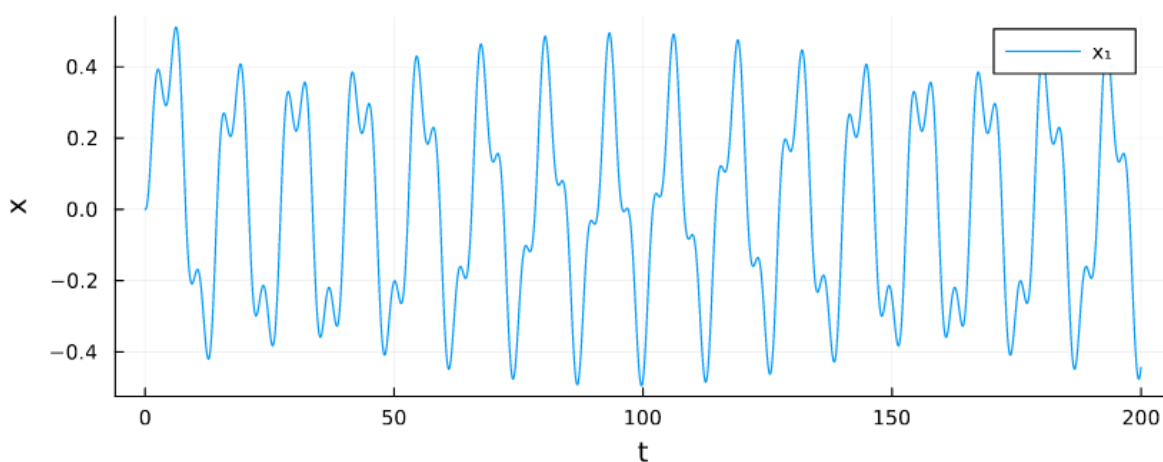


Рис. 4. График колебаний демпферного узла при  $f(t) = \sin(t) + \sin(2.9t)$  и  $c = 10$

Отметим, что существует возможность управления как минимум одним параметром демпферного узла – коэффициентом сопротивления  $c$ . На рис. 5 представлено сравнение графиков колебаний для  $c = 10$  и  $c = 30$ .

Следует отметить, что при увеличении коэффициента сопротивления амплитуда колебаний снижается. Указанное обстоятельство свидетельствует о рассеянии энергии в демпфирующем узле. Тем не менее, наряду с уменьшением амплитуды колебаний увеличение жесткости демпфера может привести к передаче колебаний в демпфируемый механизм. В

связи с этим построение и изучение многозвенных моделей демпфирующих узлов для систем конвейерного транспорта является важной задачей.

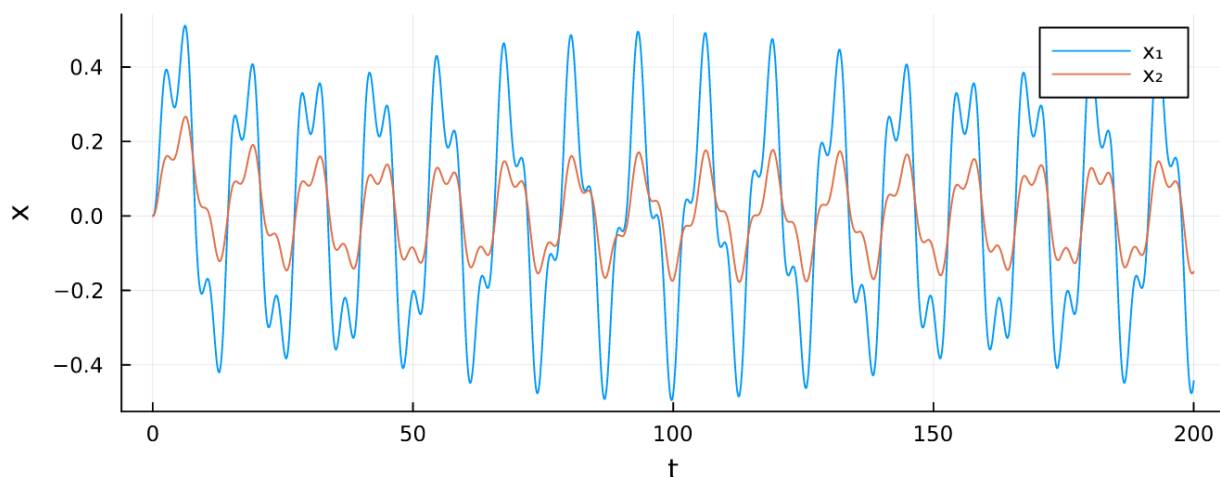


Рис. 5. Графики колебаний демпферного узла при  $f(t) = \sin(t) + \sin(2.9t)$  для  $c = 10$  и  $c = 30$

## Заключение

Таким образом, предложен подход к компьютерному исследованию моделей технических систем конвейерного транспорта с учетом управления демпфированием механических колебаний конвейерной ленты. Разработанное программное обеспечение продемонстрировало эффективность при решении поставленных задач. Предложенные модификация динамических моделей с переключениями позволяют учесть расширенный спектр особенностей функционирования ленточного конвейера с изменяющимся углом подъема. К этим особенностям относятся наличие демпфера углового положения и воздействие осевого сопротивления. Предложенный подход к компьютерному исследованию позволяет детально изучить динамику применительно к каждой из трех построенных моделей и получить условия стабилизации. В рамках изучения динамики построены графики, характеризующие изменения состояния фазовых переменных и наглядно демонстрирующее поведение систем при рассмотренных наборах параметров. На основе полученных графиков дана интерпретация результатов и выявлен ряд новых качественных эффектов.

Полученные результаты могут найти применение при проектировании машин непрерывного транспорта, а также при решении задач стабилизации и проектировании новых систем управления производственными линиями.

## Список литературы

1. Рачков Е. В. *Машины непрерывного транспорта*. М.: Альтаир-МГАВТ, 2014.
2. Дмитриев В. Г., Вержанский А. П. *Основы теории ленточных конвейеров*. М.: Горная книга, 2017.



3. Subba Rao D. V. *The belt conveyor: a concise basic course*. London, New York: CRC Press, 2020.
4. Fedorko G., Komenskeho P. Implementation of industry conveyor transport // *MATEC Web of Conferences*. 2019, v. 263, 01001.
5. He D., Pang Y., Lodewijks G. Belt conveyor dynamics in transient operation for speed control // *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering*. 2016, v. 10, no 7, p. 865–870.
6. Andrejiova M., Grincova A., Marasova D. Measurement and simulation of impact wear damage to industrial conveyor belts // *Wear*. 2016, v. 12, p. 368–369.
7. Andrejiova M., Grincova A., Marasova D. Monitoring dynamic loading of conveyor belts by measuring local peak impact forces // *Measurement*. 2020, v. 158, 107690.
8. Druzhinina O. V., Masina O. N., Petrov A. A. Modeling of the belt conveyor control system using artificial intelligence methods // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021, v. 2001, 012011.
9. Masina O. N., Druzhinina O. V., Petrov A. A. Controllers synthesis for computer research of dynamic conveyor belt model using intelligent algorithms // *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022, v. 502, p. 462–473.
10. Masina O. N., Druzhinina O. V., Petrov A. A. Computer research and stabilization of Dynamic Models of Conveyor Systems // *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*. 2023, v. 1821, p. 165–176.

## **Control of damping of mechanical vibrations in modeling conveyor transport systems**

***Petrov, A. A.***

[xeal91@yandex.ru](mailto:xeal91@yandex.ru)

I. A. Bunin Elets State University, Russia

A mathematical model of a conveyor belt with a dynamic change in the angle between the horizontal plane and the plane of the conveyor belt is considered. The description of this model is carried out using a nonlinear system of ordinary differential equations in a four-dimensional phase space. The generalized function of axial resistance during conveyor movement is used. The switching law for fixing the horizontal position of the conveyor belt is proposed. The trajectory dynamics of this model is studied taking into account the variability of parameters. To describe the vibration damping of the conveyor belt, a model of a system with one degree of freedom is proposed. Graphs of the phase trajectories of the model are obtained taking into account the variability of the axial drag coefficient. The interpretation of the obtained results is given and the possibilities of using models are described.

***Keywords:*** *mathematical model of a conveyor belt, damping of vibrations, stabilization, trajectory dynamics, simulation*