Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2023, № 1, с. 180–184.
Поступила: 06.04.2023
Окончательный вариант: 24.04.2023
© УлГУ

УДК 517.5

О слабой обратимости в аналитических пространствах Герца

Шамоян Р. Ф.[1,*], ***Ермакова Д. С.***[2]

*rsham@mail.ru
[1]Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
[2]Брянский государственный университет, Брянск, Россия

В заметке мы обобщаем некоторые ранее известные утверждения о слабой обратимости в классах типа Бергмана в единичном шаре и полидиске на классы типа Герца. В работе при доказательствах теорем модифицирован подход, примененный ранее при изучении слабо обратимых элементов в менее общих аналитических пространствах типа Бергмана в единичном шаре и полидиске. В одномерном случае задача слабой обратимости рассматривалась многими авторами.

Ключевые слова:слабая обратимость, пространства типа Бергмана, пространства Герца, единичный шар, полидиск*

В заметке даны некоторые обобщения недавних результатов из [3] и [4] о слабой обратимости в пространствах Бергмана на более общие пространства Герца. Описание и исследование свойств тех или иных слабо обратимых элементов в тех или иных конкретных аналитических функциональных пространствах в одномерном случае тесно связано с различными задачами теории функций комплексного переменного, а также с широким кругом задач от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа. В одномерном случае изучение слабо обратимых элементов в пространствах аналитических в единичном круге функций фактически было начато в работах М.В. Келдыша и затем продолжена в работах многих математиков. В многомерном случае эта задача в многомерных аналитических пространствах в поликруге и в единичном шаре комплексного пространства начала исследоваться сравнительно недавно. Отметим также, наконец, что задача слабой обратимости и различные тесно связанные с этой задачей проблемы и приложения этих задач в одномерном случае были рассмотрены ранее в частности в работах [1, 2] и [5, 6], а в многомерном случае сравнительно недавно в работах [3, 4]. Введем необходимые определения.

Пусть U^n единичный полидиск комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, B^n – единичный шар комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$. Пусть dv и dm_{2n} – нормированные меры Лебега на B^n и U^n. Пусть $\{a_k\}$ – r-решетка в B^n и U^n (см. [3] - [4]). Пусть $B(z,r)$ – шар Бергмана в B^n, а $U(z,r)$ – шар Бергмана в U^n (см. [3] - [4]). Определим пространства Герца: Пусть $H(B^n)$ – класс всех аналитических функций в B^n, $H(U^n)$ – класс всех аналитических функций в U^n. Аналитические классы Герца определим следующим образом. Пусть φ – положительная функция на $(0;\infty)$.

$$D^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(B^n) : \sum_{k \geq 0} \left(\int\limits_{B(a_k,r)} |f(z)|^p \, dv_\alpha(z) \right)^{q/p} < \infty \right\},$$

$$\tilde{D}^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(B^n) : \int\limits_{B} \left(\int\limits_{B(z,r)} |f(z)|^p \, dv_\alpha(z) \right)^{q/p} dv(z) < \infty \right\},$$

где $dv_\alpha(z) = \varphi^\alpha(|z|) \, dv(z)$, $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

$$B^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(U^n) : \sum_{k \geq 0} \left(\int\limits_{U(a_k,r)} |f(z)|^p \, d\tilde{v}_\alpha(z) \right)^{q/p} < \infty \right\};$$

где $d\tilde{v}_\alpha(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi^\alpha(|z_j|) \, dm_{2n}(z)$, $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

$$\tilde{B}^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(U^n) : \int\limits_{U^n} \left(\int\limits_{U(z,r)} |f(z)|^p \, d\tilde{v}_\alpha(z) \right)^{q/p} dv(z) < \infty \right\}, 0 < p, q < +\infty, \alpha > -1.$$

Заметим, что в единичном круге, если $p = q$, то $B^{p,p}_\alpha = D^{p,p}_\alpha = A^p_{\alpha,\varphi}$, где $A^p_{\alpha,\varphi}$ – классическое пространство типа Бергмана, $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$ хорошо изученное в работах различных авторов (см. [3, 4]).

Предположим, что X подпространство пространства $H(B_n)$ в котором множество всех многочленов J от $z_1, \dots, z_n$ всюду плотно. При этом операторы $(\delta_z f) = f(z)$; $s_j f(z) = (z_j) \cdot f(z_1, \dots, z_n)$, $j = 1, \dots, n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in B_n$ непрерывны в X.

Определение 1 ([4]). Функция $f \in X, f(z) \neq 0, z \in B_n$ называется слабо обратимой в пространстве X, если существует последовательность многочленов $\{P_m\}; P_m \in J; m = 1, 2, \dots$ такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} P_m f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.

Пусть φ – положительная монотонно растущая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = (0;\infty)$. Скажем, что φ – весовая на $(0;+\infty)$ если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = +\infty$.

Теорема A ([3]). Пусть φ – весовая функция из $C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} \searrow 0, x \to +\infty$ и существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)\cdot x}{\varphi(x)} = a_\varphi, 0 \le a_\varphi < +\infty, \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{1/2} dx = +\infty.$$

Тогда, если f слабо обратима $f \in D^{p,p}(\varphi)$; $f(z) \neq 0$, $z \in B_n$, $1 < p < +\infty$, то f слабо обратима в пространстве $D^{p',p'}(\varphi), 0 < p' < p < \infty$.

Справедлив следующий результат:

Теорема 1. *Пусть φ – весовая функция из $C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} \searrow 0, x \to +\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)\cdot x}{\varphi(x)} = a_\varphi$, $0 \le a_\varphi < +\infty$, $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{1/2} dx = +\infty$. Тогда, если f слабо обратима $f \in D^{p,q}(\varphi)$; или $f \in \tilde{D}^{p,q}(\varphi)$ $f(z) \neq 0$, $z \in B_n$, $1 < p, q < +\infty$, то f слабо обратима в пространстве $D^{p',q'}(\varphi)(\tilde{D}^{p',q'}(\varphi))$ при всех $0 < p' < p < \infty, 0 < q' < q < \infty$.*

Замечание 1. При $p = q$ теорема 1 обобщает теорему A.

Пусть $\tilde{v}_\alpha(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\varphi_j(\frac{1}{1-|z_i|}))$, $\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n))$; $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j \in \mathbb{R}_+ \in [0;+\infty)$, где $\varphi_j, 1 \le j \le n$ являются монотонно растущими положительными функциями на $\mathbb{R}_+$; $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln r}{\varphi_j(r)} = 0, j = 1, \dots, n$. Такие функциии назовем весовыми в $I^n = (0;1]^n$ вектор-функциями. Тогда классы $B^{p,q}_\alpha, \tilde{B}^{p,q}_\alpha$ с мерой $d\tilde{v}_\alpha(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\varphi_j(\frac{1}{1-|z_i|}))$ мы обозначим через $B^{p,q}_\varphi(U^n)$ и $\tilde{B}^{p,q}_\varphi(U^n)$, $\varphi_j \to +\infty$, $x \to +\infty$, $\varphi_j \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{\varphi_j''(x)}{\varphi_j'^2(x)} \searrow 0; x \to +\infty$.

Пусть X подпространство $H(U^n)$ в котором множество всех многочленов J от $z_1, \dots, z_n$ всюду плотно, при этом операторы $\delta_z f = f(z)$, $\delta_j f = z_j \cdot f(z_1, \dots, z_n)$, $z \in U^n$, $j = 1, \dots, n$ непрерывны в X.

Определение 2 ([4]). Пусть X квазинормированное подпространство $H(B_n)$ Функция $f \in X, f \neq 0$, $z \in U^n$ слабо обратима в X если существует последовательность многочленов $\{P_m\}; P_m \in J$; $\lim\limits_{m\to+\infty} ||P_m f - 1||_X = 0$.

Теорема B ([4]). Пусть $\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n))$ весовая функция на $\mathbb{R}^n_+$, причем $\varphi_j \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+), j = 1, \dots, n$ такие что $\frac{\varphi_j''(x)}{\varphi_j'^2(x)} \searrow 0$; $x \to +\infty$, $j = 1, \dots, n$ и существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{\varphi_j(r)} = a_j, \quad 0 \le a_j \le \infty; \quad \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда если f слабо обратима $f \in B^{p,p}_\varphi(U^n), f \neq 0, z \in U^n, 1 < p < \infty$, то f слабо обратима в пространстве $B^{q,q}_\varphi$ при всех $0 < q < p < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \ldots, \varphi_n(r_n))$ весовая вектор-функция на $\mathbb{R}^n_+$, причем $\varphi_j \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+), j = 1, \ldots, n$ такая что $\frac{\varphi''_j(x)}{\varphi'^2_j(x)} \searrow 0$; $x \to +\infty$, $j = 1, \ldots, n$ и существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi'_j(x)\cdot x}{\varphi_j(x)} = a_j, \quad 0 \le a_j \le \infty; \qquad \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда если f слабо обратима $f \in B^{p,q}_\varphi(U^n)(\tilde{B}^{p,q}_\varphi(U^n)), f \ne 0, z \in U^n, 1 < p, q < \infty$, то f слабо обратима в пространстве $B^{p',q'}_\varphi(\tilde{B}^{p',q'}_\varphi)$ при всех $0 < p' < p < +\infty$, $0 < q' < q < +\infty$.

Замечание 2. При $p = q$ результат теоремы 2 обобщает теорему B, так как $B^{p,p}_\varphi = B^p_\varphi$.

Приведем также леммы, результаты которых используются при доказательстве наших теорем.

Лемма 1. *1) Пусть $f_\rho(\xi) = f(\rho\xi), f \in D^{p,q}_\varphi(\tilde{D}^{p,q}_\varphi)$, $0 < p, q < \infty$, $0 < \rho < 1$. Тогда*

$$\lim_{\rho\to 1-0} ||f_\rho - f||_{D^{p,q}_\varphi} = 0 \quad \left(\lim_{\rho\to 1-0} ||f_\rho - f||_{\tilde{D}^{p,q}_\varphi} = 0\right)$$

2) Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $D^{p,q}_\varphi(D^{\tilde{p},q}_\varphi)$,
$1 \le p, q < \infty$, $f(w) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(w), w \in B_n$. Тогда справедливо представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \Phi(f_k)$$

Лемма 2. *:*

1) Пусть $f \in B^{p,q}_\varphi(\tilde{B}^{p,q}_\varphi)$, $0 < p, q < \infty$, $f_\rho(z) = f(\rho z), \rho \in [0; 1), z \in U^n$. Тогда

$$\lim_{\rho\to 1-0} ||f_\rho - f||_{B^{p,q}_\varphi(U^n)} = 0 \left(\lim_{\rho\to 1-0} ||f_\rho - f||_{\tilde{B}^{p,q}_\varphi(U^n)} = 0\right).$$

2) Пусть $0 < p, q < +\infty$, Φ — линейный непрерывный функционал на $B^{p,q}_\varphi(B^{\tilde{p},q}_\varphi)$, $l_z(\xi) = \frac{1}{1-\bar{\xi}z}, \xi, z \in U^n$, $g(z) = \Phi(l_z)$. Тогда для любой $f \in B^{p,q}_\varphi(B^{\tilde{p},q}_\varphi)$ справедливо равенство

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{|z_1|=1} \ldots \int\limits_{|z_n|=1} f(\rho, \xi) g(\rho\bar{\xi}) dm_n(\xi).$$

Авторы надеются найти приложения полученных результатов о слабой обратимости в новых многомерных пространствах типа Герца при исследовании свойств тех или иных дифференциальных операторов, действующих во введенных в этой статье многомерных пространствах типа Герца в единичном полидиске или в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$.

Список литературы

1. Мергелян С.Н. Весовые приближения многочленами // *Успехи мат.наук*, 1956, Т.9, №5, стр. 107–152.
2. Никольский Н.К. Инвариантные подпространства в теории операторов и в теории функций//*Итоги науки и техники, Сер. Мат. Анализ*, 1974, №12, стр. 199–412
3. Шамоян Ф.А Критерий слабой обратимости в весовых L^p-пространствах аналитических в шаре функций // *Сиб.мат.журнал*, 2009 Т.50,№ 6 с. 1115–1132
4. Шамоян Ф.А. О полиномиальной апроксимации в весовых анизотропных классах голоморфных функций //*Complex variabl. and operator theory* 2015 Т.9, с. 1135–1156
5. Djrbashian A.E. Shamoian F.A. Topics in the theory of A^p_α spaces// *Teubner Texte Zur Math.*, Leipzig, 1988, 200 p.
6. Келдыш М.В. Sur l'approximation en moyenne par polynomes de functions l'une variable complexe//*Мат.сборник*,1945,Т.16, №1, стр. 1–20.

On weak invertibility in analytic Herz type spaces of several variables

Shamoyan, R. F.[1,*], ***Ermakova, D. S.***[2]

*rshan@mail.ru

[1] Saratov State University, Russia

[2] Bryansk State University, Russia

We extend some known results on weak invertibility in Bergman type spaces to Herz type spaces in the unit ball and polydisk. For our proofs in more general than Bergman type spaces Herz type spaces we modify approaches that were used earlier in the study of various weakly invertible elements in Bergman type spaces in the polydisk and in the unit ball. In onedimensional case the problem of weak invertibility was considered by many authors.

Keywords: *weak invertibility, Bergman type spaces, Herz type spaces, unit ball, polydisk*